

إسهامات جودل فى تطوير المنطق الرياضى

عند برتراندرسل

"رؤية نقدية"

د.نادية السيد عبد القادر

مدرس المنطق وفلسفة العلم - كلية الآداب

جامعة الاسكندرية

فهرس المحتويات

رقم الصفحة	الموضوع
	المقدمة
	أولاً : نقد جودل للتصورات المنطقية
	١- واقعية رسل والتصورات المنطقية : Russell's Realistic
	٢- محاولة التجانس بين بديهيات المنطق والرياضيات وقوانين العلم الطبيعي
	٣- نقد جودل للوصف المحدد فى الدلالة : On denoting
	ثانياً : المتناقضات المنطقية وكيفية حلها : The Logical paradoxes and their solution
	١- محاولة رسل حل المتناقضات :
	I - نظرية الزجراج المسار المتعرج The Zigzag Theory
	II - نظرية تحديد الحجم : The theory of limitation of size
	2 - مبدأ الدائرة المفرغة: The vicious circle principle
	I - إستحالة التطابق بين الفصل والدالة:
	II _ الفصول بمعنى الكثرة Pluralities
	٣- العلاقات
	I - العلاقات التماثلية: Analogous Relations
	II - العلاقات اللاتماثلية : Asymmetrical relations
	III - العلاقات كدالات وصفية: Descriptive functions
	ثالثاً : نظرية ترتيب الأنماط: The theory of orders
	رابعاً: نظرية الأنماط The Theory of Types:
	نتائج البحث
	ثبت مصادر ومراجع البحث

المقدمة :

شهد القرن التاسع عشر تطوراً هائلاً في مجال البحث العلمي وبخاصة في الرياضيات حيث انبثقت مشكلات وقضايا رئيسة كانت ولا زالت حتى يومنا هذا مثار جدل ومحوراً للنقاش بين العلماء والرياضيين؛ وذلك بهدف الوقوف على أبعادها الإستمولوجية وأسسها وطبيعتها، التي تعد الركيزة الأساسية لمعرفة معيار الحقيقة متجاوزين حدودها التطبيقية. حيث شكلت حقيقة أسس العلوم الصورية _ المنطق والرياضيات _ والتي تتحدد وفق منظور رؤية ذاتية عقلية ومبادئ يعتقها المنطقى والرياضى ثم يأخذ على عاتقه محاولة تأسيس نظريته وتطبيقها لخلق علم أعم من الرياضيات، يتحول فيه موضوعات الفكر ووسائله، أيا كانت، إلى حقيقة ما يصل إليه العقل من نتائج فى رحلته الإستمولوجية التي تبدو رحلة لانهائية، ومحاولة بحثة عن معيار للحقيقة ومعيار الصدق والإتساق فى كل الأنساق الصورية.

تكمن إشكالية البحث فى محاولة التعرف على إسهامات "جودل" فى تطوير المنطق الرياضى من خلال إنتقاداته لبعض الأفكار المنطقية فى الأنساق المنطقية ولاسيما النسق الراسلي، وسيلينا فى ذلك هو الإجابة عن التساؤلات التالية :

- هل استطاعت نتائج مبرهنات جودل إعادة النظر فى محاولة رسل لرد الرياضيات للأسس المنطقية؟
- كيف طور رسل نظريات المنطق الرياضى؟
- هل يعد موقف جودل تطويراً حقيقياً لمنطق رسل؟ وإن كان الأمر كذلك فما الخطوط الرئيسية لمعالم التطوير التي أتى بها جودل؟

هذا هو ما تركز عليه هذه الورقة البحثية فى تفصيلاتها المتعددة؛ ولكى نستعرض موضوعاً معقداً ذا أبعاد فكرية متعددة علينا استخدام المنهج التحليلى النقدي واحيانا نلجأ إلى المنهج التاريخى كلما دعت الضرورة إلى ذلك.

أولاً : نقد جودل للتصورات المنطقية :

بدأ جودل (*رؤيته النقدية للنزعة المنطقية (*) بتحليل الأنساق البديهية (**)) للمنطق الصوري

(*كورت فريدريك جودل "Kurt Friedrich Gödel": عالم رياضيات ومنطقي نمساوي، ولد في ٢٨ من إبريل عام ١٩٠٦، فيما عرف آنذاك ببيرون في النمسا. وكان الابن الثاني لرودلف وماريان هانز هان جودل، كان جودل تلميذاً متفوقاً في المدرسة الثانوية يحصل على أعلى التقديرات في الرياضيات، واللغة والدين، كما كان طالباً متميزاً بجامعة فيينا، حيث تابع دراسته ليحصل على درجة الدكتوراه عام ١٩٢٩. وقد حصل مباشرة على منصب تدريسي بها، وهناك أثبت مبرهنة عدم الاكتمال. (Solomon Feferman : In the light of logic, in Logic and computation in philosophy, Oxford ,,U. press, U.S.A. p.p.128-129.) حيث برهن فيها على عدم اكتمال الأنساق الصورية؛ أي تلك التي تفترض الصياغة الصورية لعلم حساب الأعداد الطبيعية. وقد بين أن مثل تلك الأنساق إنما تحتوي على قضايا هي داخل إطارها مما لا يمكن البرهنة عليها ولا يمكن رفضها على السواء. وقد تسبب الفرض، الذي قدمه جودل لقيام البحث في حدود الأنساق الصورية على أيدي ألونزوتشيرتش، وستيفن لول كلين، وتارسكي، وغيرهم، وبلغ البحث ذروته في الاستنباط الفلسفي الأساسي القائل بأن الصياغة الصورية، بطريقة كاملة للمعرفة العلمية، مستحيلة. وقد كرس جودل نفسه لعلم ما وراء الرياضيات والمنطق التكويني ونظرية العوامل الارتدادية. وفي عام ١٩٣٦ تأثر بأراء الوضعية الجديدة ووصل إلى معارضة الذاتية. (م. روزنتال ويودين : الموسوعة الفلسفية، ترجمة سمير كرم، مراجعة صادق جلال العظم وجورج طرابيشي، دار الطليعة للطباعة والنشر، بيروت، ص ٣٢٢). ظل جودل في فيينا حتى عام ١٩٤٠، حين هرب من الفظائع النازية الأخذة في التفاقم لتولي منصب بمعهد الدراسات المتقدمة في برنستون. ظل فيها حتى وفاته في ١٤ يناير ١٩٧٨. (Solomon Feferman : . opcit, p.129.)

(* النزعة المنطقية Logicism: هي تلك الأطروحة القائلة بإمكانية رد الرياضيات إلى المنطق، والتي قدمت من خلال رسل ووايتهد بغرض جعل الرياضيات فرعاً من المنطق، وكان هدفهما أن يقدمتا الرياضيات من خلال المنطق وامتدت أرهاصاتها منذ ليبنتز؛ الذي تصور المنطق كعلم يحتوي على الأفكار والمبادئ لكل العلوم الأخرى، إلا أنها لم توضع في محك الممارسة إلا على يد فريجه الذي وضع لنفسه هدفاً ذا أبعاد ثنائية؛ أولهما: تعريف المفاهيم الأساسية للرياضيات مستخدماً مصطلحات المنطق الخالص، وثانيهما: إثبات مبادئ الرياضيات مع التقييد كلية بمبادئ المنطق واستخدام البراهين المنطقية وحدها. إلا أنه أخفق في تحقيق الهدف المرجو نظراً للافتراض المنهجي الخاطيء باستقلال الرياضيات عن العالم الواقعي وعن الأشياء التي تبحثها، وفي محاولات رسل للتصدي للمتناقضات صاغ نظريته للأنماط عام ١٩٠٨، يوضح فيها الأفراد ويرمز لها بالرمز الأقل ٠ وخصائص الأفراد بالرمز ١، وخصائص موضوعات النمط ١ بالرمز ٢، وهكذا بحيث يصبح البناء المحدد المقترح لمجموعة أو لكثرة للتعريفات الممكنة للموضوعات ذات النمط المعطى، يستنبط من هذه الأسس وجود الرياضيات. واتفق أنصار الحدسية والصورية على البدء من المنطق لاستنتاج أبسط إجراءات الرياضيات، مثل النظرية الإبتدائية للأعداد الطبيعية ٠، ١، ٢، والتي جادلت بأن "التصورات المنطقية في هذا المستوى هي افتراضات مسبقة في صياغات منطقية لنظرية الأنماط. وتأتي نظرية جودل لتنتزع فكرة عدم إمكان رد الرياضيات إلى المنطق، حتى في الأقسام الأولية منها. (روزنتال ويودين : الموسوعة الفلسفية، ص ٥٢٥-٥٢٦)، وأيضاً Stephen C. kleene: "Kurt Gödel A biographical memoir", in National academy of sciences, Washington D.C., 1987,,p.148.

(**) النسق البديهي : يجب أن تخضع مجموعة البديهيات ، في أي نسق ، لبعض الشروط منها: أولاً؛ يجب أن تتميز بالإتساق consistency بحيث لا يمكن استنباط أحكام بداهة وعكسها منها عند تطبيق قواعد التركيب، وإمكانية البرهنة على أي قضية داخل النسق. ثانياً؛ يجب أن تتميز بالاستقلال Independence أي لا يمكن إثبات أي بديهية من تلك البديهيات كحكم بداهة بناء على أحكام بداهة أخرى، وبالتالي لا تتصف بالتكرار والتطوير. ثالثاً؛ يجب أن تتصف بالاكتمال Completeness بتكوين أساس كاف للبرهنة على كل عبارات تحصيل الحاصل الخاصة بالنسق، وإذا أدت إضافة بديهية مستقلة أخرى إليها إلى عدم الإتساق داخل هذه المجموعة، وبذلك تخلق أساساً متكافئاً مقبولاً للنسق المنطقي (أ.ه. بيسون و د.ج. أوكونر: مقدمة في المنطق الرمزي، ترجمة: عبد الفتاح الديدي، دار المعارف بمصر، القاهرة، ص ص ١٤٥-١٦٣. كانت تبدأ الرياضيات، وفقاً للنظرية البديهية، من مفاهيم لمعرفة وبديهيات ونظريات للبرهان، ولكنها كتبت بلغة تقليدية " في ألفاظ محددة، وعبارات معينة" وكان معنى استدلال البديهية من النظريات طبقاً للمنطق التقليدي والقضية الحملية، التي كانت تحمل المقدمات على الحجة بينما اختلف الأمر في النظرية الصورية حيث تقدم الرموز للقضايا والمحمولات والعلاقات والأفراد، الروابط المنطقية (مثل السلب. والتضمن والوصل) وقد تم صياغة العبارات بنسق محدد، واستدلال صيغة من صيغ أخرى وفقاً لتعريف محدد وطبقاً لقواعد خاصة، وتطبيق هذه القواعد باعتبارها إدراكاً طبيعياً لشكل الرموز، وليس للمعنى أي دخل هنا. j. Van Heijenoort: "Gödel's theorem" in "The Encyclopedia of Philosophy" Edited By, Paul Edwards, Collier Macmillan, New York, VoL.3 1972 , P. 349.

والذى أكد فيها رسل على أن "المنطق الرياضي، الذي ليس إلا عبارة عن صياغة(*) دقيقة وكاملة للمنطق الصوري"، وللمنطق الرياضى جانبين مختلفين. أما الجانب الأول فيتمثل فى أنه أحد أقسام الرياضيات(**)؛ ومن ثم يتعامل مع الفصول والعلاقات وتراكيب الرموز، ... إلخ، بدلاً من الأعداد والدالات والأشكال الهندسية، ... إلخ. وأما الجانب الثانى فيتمثل فى أنه علم قبلى أولى يسبق العلوم الأخرى، ويحتوي على الأفكار والمبادئ التى تميز كل العلوم.(1)

بهذا المعنى الثانى أدرك "ليبنتر" (***) ، للمرة الأولى، "المنطق الرياضى" فى كتابه الهجاء العام أو الأبجدية العامة، حيث احتل فيه جزءاً أساسياً. أكد فيه استحالة البرهنة على النظرية إلا إذا توافر أمران : أداة رمزية ، وحساب منطقي. وهكذا استطاع بعقليته الإبداعية أن يضع، منذ قرنين من الزمان ، إرهابات نظريات تطورت ومازالت فى طريقها للتطوير لتحقيق رؤية؛ تشهد له بالتفوق_ كما علق لويس كوتوراه - على محاولات المناطقه اللاحقين؛ ظنا من البعض -

(*) الصياغة : هى استخدام لغة خاصة من الرموز والصيغ وتطبيق المناهج الرياضية فى مجال المنطق أى أنه يمكننا القول بأن المنطق الرياضى يتخذ المنطق موضوعاً له والرياضيات منهجاً، ويتضمن تعميمات بعيدة المدى. وبذلك يصبح بمثابة مرحلة تطوير أفكار ومناهج المنطق الصورى التقليدى متضمناً سلسلة كاملة من الحسابات المنطقية وهو النظرية التى تنطبق على مثل هذه الحسابات وفروضها وخصائصها وتطبيقاتها. فبجانب دراسته للبناء الصورى للحسابات المنطقية -تحليل البناء اللفظى المنطقى - يبحث أيضاً العلاقات بين الحسابات والمجالات الأساسية التى تفيد كثنائيات وكنماذج. (م. روزنتال : الموسوعة الفلسفية، مرجع سابق، ص ٥٠٠).

(**) الرياضيات Mathematics " علم الأبنية الرياضية عبارة عن مجموعات بين عناصرها توجد بعض العلاقات، وقد عرف أنجلز الرياضيات على النحو التالى : " تتناول الرياضيات البحتة أشكال المسافة وعلاقات الكم للعالم الواقعى كما أن رسل قد ذهب إلى أن القضايا الرياضية علاقات لا تقبل الرد إلى ما ليس بعلاقات". (م. روزنتال : الموسوعة الفلسفية، مرجع سابق، ص ٢٣٣) وأيضاً فؤاد كامل وآخرون : الموسوعة الفلسفية المختصرة، مراجعة زكى نجيب محمود، مكتبة الأنجلو المصرية، 1982، ص ١٥٧) ويختلف مستوى التفكير للرياضيات البحتة والرياضيات التطبيقية؛ فبينما تهتم الثانية بالقضية الرياضية من جهة صدقها وانطباقها على الواقع، تهتم الأولى بصحة القضية الرياضية، وصحة الاستدلال على صيغة رياضية من صيغة أخرى تكونت من مجموعة من المفاهيم الأولية كالمسلّمات أو البديهيات التى نفترض صدقها دون برهان. ويصبح البحث فى سلامة الجانب الصورى من الاستدلال هو الموضوع الرئيس. (الموسوعة الفلسفية العربية، معن زيادة، المجلد الثانى، (المدارس والمذاهب والاتجاهات والتيارات، القسم الأول، معهد الإنماء العربى، الطبعة الأولى، 1988 ج ٢، ص ٤٩٦ .

(1) Gödel , K.: "Russell's Mathematical Logic", in " The Philosophy of Bertrand Russell", Edited by Schilpp, Paul, A., North Western University , Evanston & Chicago , 1944 p. 125

(***) حيث قدّم ليبنتر، فى القرن السابع عشر، حلماً متجسداً فى تأسيس علم أعم من الرياضيات؛ فيه يتحول الاستنباط إلى حساب؛ أى إمكانية رد الرياضيات إلى المنطق الصورى، والتى لم توضع محك الممارسة إلا على يد فريجه؛ حيث وضع لنفسه هدف (١) تعريف المفاهيم الأساسية للرياضيات بمصطلحات المنطق الخالص؛ (٢) إثبات مبادئها مع التقيد كلية بمبادئ المنطق مستخدماً البراهين المنطقية وحدها. محمد ثابت الفندى : فلسفة الرياضة، ١٩٨٧، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية، ص ١٢٧. وأيضاً، م. روزنتال : الموسوعة الفلسفية، ص ٥٢٥.

كانط- باكتماله منذ ميلاده؛أو بالمضى قدماً في محاولات تطويره على يد جورج بول مؤسس جبر المنطق (١)

وبعد لينتز بحوالي قرنين من الزمان أصبحت فكرته عن الحساب المنطقي Logical calculus كافية لنوع الاستدلال الشائع في العلوم الحقيقية، ووضعت موضع التنفيذ (بشكل ما على الأقل، إن لم يكن هو الذي في ذهن "لينتز") على يد "فريجه" (*). حيث كان مهتماً بشكل أساسي بتحليل الفكر واستخدام حساباته في المقام الأول لاشتقاق علم الحساب من المنطق. وعرف عنه تحليله للبراهين والخواص الأولية لسلسلة الأعداد الصحيحة. ومن ناحية

(١) محمد ثابت الفندى : فلسفة الرياضة، ص ص ١٢٨-١٢٩ .

(*) جوتلوب فريجه : (1848-1925) عالم رياضيات ، وفيلسوف ألماني ومؤسس المنطق الرياضي الحديث. مجال اهتمامه العام هو الرياضيات والتي عمل بها في قسم الرياضيات بجامعة بينا. Dummett Michael: "Frege, Gottlob", in: "The Encyclopedia Of Philosophy", Edited By: Paul Edwards, Collier Macmillan, New York; Vol. III; 1972, p. 225 اعتبر من أكبر الرياضيين الألمان في النصف الثاني من القرن التاسع عشر وأوائل القرن العشرين، وامتاز بعقليته الرياضية المنطقية التي كانت عوناً له في تطوير جزء كبير من أبحاث المنطق الرياضي، وخاصة فيما عرف بالمذهب اللوجستيقي ، الذي تبلور في صورته النهائية في مبادئ الرياضيات (1910-1913) والذي اشترك فيه كل من رسل وهوايتهد . (ماهر عبد القادر محمد : فلسفة العلوم " المنطق الرياضي "، دار النهضة العربية جـ 3، بيروت، 1985، ص ٥٥) فكان جل اهتمامه منصباً على المنطق وأسس الرياضيات، ومن أهم الفلاسفة أصحاب العلامات البارزة في الفكر الفلسفي، إذ كان له عظيم الأثر على كثير من المناطق وعلماء الرياضيات وبشكل خاص، فتجنشتين الذي افترض في مستهل رسالته ، بأن من يقرأها يكون قد قرأ أو يعيد قراءة فريجه، معلناً بأنه يدين بالجزء الأكبر من عمله هذا إلى أعمال فريجه العظيمة. Anscombe, G.E.M.; "An Introduction to Wittgenstein's Tractatus", Hutchinson University, London, 1967, p.102.

وتعد الخطوات الأساسية والجوهرية ، التي نحتها فريجه في المنطق، وتحديداً منهج اللوجستيقا، التي تناولها في " تدوين التصورات" (1879)، ذات أثر بالغ الأهمية، ففي هذا العمل ، ظهر لأول مرة حساب القضايا في صورته الجديدة، ومصطلح دالات القضايا، واستخدام الأسوار، والجمل الواضحة للقواعد الأولية للاستدلال، والتحليل المنطقي للنتائج بالاستتباط الرياضي، وهذه الأخيرة ربما تكون أكثر العناصر أهمية في تعريف الأعداد الأصلية وثبات الأسس لاشتقاق الحساب من المنطق

Runes, Dagobert D.: "Dictionary Of Philosophy", Philosophical Library, New York, 16th Edition, p. 112-113

وكان فريجه هو أول من مهد إلى حاجة الرياضيات لأدلة الإتساق، ففي كتابه ١٨٨٤. أشار على ضرورة التأكد من اتساق الرياضيات بواسطة عرض الأشياء التي يمكن اعتبارها صورة لماصدق المحمولات لتصبح أعداد حقيقية. وقد أعتقد أنه وجد هذه الأشياء في نطاق جوهر المنطق، ولهذا قام برد علم الحساب إلى المنطق. حيث هي أعداد لمعرفة لانتهائية بماصدقات تصورات محددة. بحيث تصبح الأعداد التي تنتمي إلى التصور f هي امتداد ماصدقات للتصور . لتكون مساوية للتصور "f افتراض فريجه، والذي يمكن اعتباره رابطاً لبرهان الاتساق في الحساب، قد دمر حينما اكتشف رسل متناقضات فريجه المنطقية عام ١٩٠١. (J. Van

(Heijenoort : "Gödel's theorem", P. 349-250

أخرى، كان "بيانو" (*) أكثر اهتماماً بتطبيق التحليل في الرياضيات، وبشكل النظام الرمزي الذي يمكن، من خلاله، التعبير عن الرياضيات في صورتها الأكثر تعقيداً بطريقة دقيقة تماماً بواسطة الصيغ الفردية والمعادلات الموجزة. (1)

هذا وقد استوعب برتراندرسل (***) أعمال "فريجه" و"بيانو" بصورة أساسية في كتاب "برنكيبييا" (١٩١٠-١٩١٣)، الذي يتضمن ثلاثة أجزاء واعتبر خطوة هامة نحو الصورية؛ حيث كان هناك استخدام تام للمنهج الجديد لاشتقاق أجزاء كبيرة من الرياضيات من عدد قليل جداً من تصورات منطقية وبديهيات (****) Axioms، على الرغم من أنه مازال يتغلغل في بعض أجزائها شيء من الغموض. بالإضافة لذلك، حقق العلم الجديد ثراءً عن طريق أداة جديدة،

(*) بيانو: Giuseppe Peano عالم رياضيات ومنطقي إيطالي، اهتم بدراسة أسس الرياضيات وأصولها، وعمل على تطوير لغة المنطق الصوري، من أهم كتاباته "الصيغ الرياضية" فيما بين الأعوام (١٩٠٤-١٩٠٨)، ويعرض هذا المؤلف للمفاهيم والمسلمات الأساسية في أصول الرياضيات. ساهم في تأسيس مسلمات الهندسات، وفي اكسيوماتيك العدد. (ماهر عبد القادر محمد: فلسفة العلوم - المنطق الرياضي، ص 45. وايضا محمد ثابت الفندي، مرجع سابق، ص ١٣٢).

(1) Gödel, K. "Russell's Mathematical logic", p. 125

(**) أهتم عالم الرياضيات برتراند رسل بالفلسفة، رغبة منه في الوصول إلى مبرر للاعتقاد في صدق الرياضيات، اتجه للمثالية الهيكلية تحت تأثير مؤلفات برادلي، ولكنه سرعان ما ارتد عنها إلى صورة متطرفة من الواقعية، تأثر بالحجة القائلة بأن المبدأ الأساسي في المذهب المثالي "وهو أن ما يعرف يكون مشروطاً بمعرفتنا أياه - وبذلك ينكر على خصائص الرياضيات أي صدق موضوعي" وظهر له واضحاً أن القضايا الرياضية علاقات لا تقبل الرد إلى ما ليس بعلاقات، فأدى به إلى رفض كل من المذهب المثالي القائل "بأن أحكام العلاقات تجريدات باطلّة والرأي المنسوب لأرسطو وليبتنز بأن جميع القضايا من صورة ذات الموضوع والحمول. و رد رسل الرياضيات إلى المنطق من خلال تحليل حدود الرياضيات إلى مفاهيم منطقية خالصة. (فواد كامل وآخرون: الموسوعة الفلسفية المختصرة، ص ١٥٧)

(***) البديهية Axiom تعتبر نقطة البداية في أي نظرية علمية، لا يتعين إثباتها. وتستنبط منها من مجموعها بقية قضايا النظرية طبقاً لقواعد محددة، وكانت تتميز بوضوحها الحدسي وصدقها القبلي؛ إلا أن هذا المفهوم قد أغفل الطبيعة التوازعية لها المستمدة من النشاط العلمي الأنساني العملي الذي يتطلب بدوره تكرار الأشكال المنطقية في الذهن لتصبح بديهية، - والتي أكد عليها لينين - وبذلك لا يتطلب أن تكون واضحة قلبياً وإنما يتعين أن يتوفر لها شرط واحد ألا وهو؛ أن تستنبط منها، ومنها وحدها كل القضايا الأخرى في النظرية المعينة، وتحدد صحة البديهية متى وجد تأويلات النسق المعنى أو امكن اقتراض وجودها. (روزنتال و يودين: الموسوعة الفلسفية، ص ٧٧)

وهي النظرية الصورية للعلاقات^(*). وتحقق تطور حساب العلاقات من قبل على يد⁽¹⁾ مورجان^(**) و"بيرس"^(***) و"شرودر"^(****) في تجانس مع علم الجبر للاعداد..⁽¹⁾

يذهب جودل إلى أن هذا التقديم الشامل الحالي للمنطق الرياضي ، واشتقاق الرياضيات منه، يفتقد ، بشكل كبير للدقة الصورية للأسس بحيث يمثل من هذه الناحية خطوة تراجعية مقارنة بـ "فريجه". وما هو مفتقد، قبل كل شيء، هو التعبير الدقيق عن بنية التركيب النحوية Syntax للصورية ومدلولات الألفاظ، وبنية النسق اللغوي Syntactical حتى في الحالات التي تكون فيها ضرورية لإثبات البراهين، وخاصة فيما يتعلق بـ "الرموز الناقصة"^(****). وتظهر هذه الاعتبارات ليس عن طريق التعريفات الصريحة، وإنما عن طريق القواعد التي تصف كيفية ترجمة الجمل والقضايا التي تحتويها إلى جمل وقضايا لا تحتويها. مع ذلك، كي نكون على يقين أن هذه الترجمة ممكنة ومحددة بشكل فريد وأن قواعد الاستدلال تطبق على النوع الجديد من التعبير

(*) حيث تطورت نظرية العلاقات ، التي تهتم بدراسة الصفات العامة للعلاقات والقوانين التي تحكمها، وحين يرتبط حساب العلاقات بحساب الفصول يشكل قسماً جوهرياً من نظرية العلاقات، ويدرس هذا القسم الروابط بين العلاقات وعملياتها، وقيم القوانين التي يمكن بها استنباط بعض العلاقات الأخرى م. روزنتال، يودين : الموسوعة الفلسفية، مرجع سابق، ص ٢٩٨.

(**) دى مورجان، أوغسطين De Morgan. Augustus (١٨٠٦-١٨٧١): عالم رياضى وعالم منطق إنجليزي، وأستاذ الرياضيات بالكلية الجامعية بلندن، أول رئيس لجمعية العلم الرياضى ١٨٤٧ بلندن وصاحب كتاب "المنطق الشكلى أو إحصاء الاستدلال والضرورى والمحتمل"، شغف بداسة الجبر وكتب عدة دراسات عن المنطق مروجاً للمفاهيم الرياضية، ذاع صيته وتردد اسمه فى المنطق بسبب القوانين الأساسية التى قدمها فى المنطق الجبرى ومن بينها: "رفض علاقة الاتصال مكافئ لعلاقة الانفصال" (أ. ب مكافئ لـ أ أو ب) م. روزنتال : الموسوعة الفلسفية، ص ٢١٠

(***) بيرس، تشارلز (١٨٣٩-١٩١٤) فيلسوف ومنطقى أمريكى مؤسس البرجماتية، أدخل مايسمى "قانون بيرس" :قيمة فكرة ما تكمن فى نتائجها العملية فى مقاله عام ١٨٧٨ بعنوان "كيف نجعل أفكارنا واضحة"، ولقد أثرت مؤلفاته فى المنطق- الذى كان يفهمه بوصفه نظرية عامة فى العلاقات - تأثيراً هاماً على المنطق الرياضى. م. روزنتال و يودين : الموسوعة الفلسفية، ص ٩٨.

(****) شرودر، إيروين Erwin, Schrodinger ١٨٨٧-١٩٦١ عالم طبيعة نمساوى، اهتم بعلم الطبيعة الإحصائى، وعلم الطبيعة الحيوى، وتاريخ العلم والفلسفة، وكانت فكرته الفلسفية الأساسية الاعتقاد بأن الذات والموضوع لا ينفصلان. م. روزنتال : مرجع سابق، ص ٢٦٠.

(1) Gödel, K.: "Russell's Mathematical logic", p.p 125-126.

(*****) الرموز الناقصة: incomplete symbols هي تلك الرموز التي لا معنى لها بمفردها أو بمعزل عن بقية الرموز الأخرى فى القضية، وأطلقها رسل على الرمز المركب، أو الوصف إذ أنه هو يعجز - فى ذاته- على إعطاء معنى تام ومن ثم فهو فى حاجة لغيره أى لسياق ليكسبه معنى، لأن الوصف يكتسب معناه من خلال سياق الحديث مع غيره من الرموز. (محمود فهمى زيدان: فى فلسفة اللغة، دار النهضة العربية، بيروت، 1985، ص ١٨. وأيضا ماهر عبد القادر: المنطق الرياضى، أورينتال، الإسكندرية ٢٠٠٩، ص ١١٨).

لذا فمن الضروري أن يكون هناك مسح لكل التعبيرات الممكنة، ويمكن إعداد ذلك فقط عن طريق الاعتبارات التركيبية أي اعتبارات بنية الأنساق اللغوية. (١)

تعتبر مسألة الاهتمام بالجانب الدلالي موضع شك؛ وبشكل خاص بالنسبة لقاعدة التعويض^(*) والإحلال بالرموز المحددة عن طريق تعريفها. وبتطبيق هذه القاعدة الأخيرة على التعبيرات ، التي تحتوي على رموز محددة أخرى. فإن ذلك يتطلب أن يكون ترتيب حذفها أو استبعادها محايداً. ومع ذلك ليس هذا هو الحال دائماً. (٢) حيث يتم إجراء الحذف عن طريق التبادل في النظريات التي تتفق مع التعريفات، بحيث تكون قاعدة التعويض هي التي يتم إثباتها.

الأمر إذا تطلب بحثاً مفصلاً لقواعد المنطق الذي نفكر وفقاً له؛ وصياغتها بطريقة واضحة، وأن تقبل كافتراضات لا يكونها قاطعة، الأمر الذي يتيح إمكانية السماح بنظم متعددة وأنواع المسلمات المختلفة والمتناقضية (الأقليدية واللوياتشفسكية) دون أن نقرر- مسبقاً- أيهما صادق. ويصبح كل إنسان حراً في بناء منطقته وفق شروطه الخاصة، ولن يعد لتصحيح الأخطاء المنطقية في تطوير نظرية أكسيوماتيكية معني مطلقاً. (٣)

لم يحاول جودل التعمق في برنكيبييا لتحليل أى من المحتوي الرياضى، والنزعة الصورية Formalism وإنما كان جل اهتمامه منصباً على كيفية تحليل رسل لمفاهيم وبديهيات المنطق الرياضى تلك التى تعد كيانات مجردة استمد منها، رغم طبيعتها، صرحا من الدقة واليقين اللذان . بدورهما. أشنق منهما الرياضيات أساس الصدق واليقين فى كافة العلوم. مصرحاً أن "ما قدمه "رسل" من أفكار عدة، ومثيرة للاهتمام ، والتي ظهر بعضها بوضوح أكثر في كتاباته المبكرة. على الرغم من أن محتواها قد لا يتفق . جزئياً. مع وجهة نظر "رسل" فى كتاباته

(1) Gödel, K.: "Russell's Mathematical logic", p 126.

(*) قاعدة التعويض: The rule of substitution تسمى - أيضاً- بقاعدة الاستبدال ، وتعد من أهم المعايير التى تحكم عملية الاستدلال، حيث ينشأ التعويض لتلبية حاجات الإشتقاق داخل النسق، للبرهنة على نظرية من النظريات، ولها صورتان؛ الأولى : "التعويض بالتعريف أو الإبدال" والتي تسمح بالتعويض عن صيغة رمزية بأخرى مكافئة لها من حيث التعريف، أى دالة محل دالة، بشرط أن تكون مساوية لها فى قيم الصدق وتؤدى نفس المعنى. أما الصورة الثانية فتسمى بقاعدة الاستبدال الموحد أو قاعدة التعويض بين المتغيرات؛ وفيها يقع التعويض على المتغيرات وحدها إما بمتغير آخر، أو بدالة ومن ثم يمكن الحصول على قضايا جديدة وصادقة (برتراند رسل : مقدمة الفلسفة الرياضية، ترجمة محمد مرسى أحمدو أحمد فؤاد الأهوانى مؤسسة سجل العرب، القاهرة، 1980، ص ١٦٥ . وأيضاً ألفرد تارسكي: مقدمة للمنطق ومناهج البحث فى العلوم الإستدلالية، ترجمة عزمى إسلام، مراجعة فؤاد زكريا، الهيئة العامة للتأليف والنشر، القاهرة، 1970، ص ٨٧ . وأيضاً محمد مهران : مقدمة للمنطق الرمزي، دار الثقافة للطباعة والنشر، القاهرة، ١٩٧٨ ص ١٦٠).

(2) Gödel, K.: "Russell's Mathematical logic", p 126.

(٣) روبيير بلانشى: المنطق وتاريخه من أرسطو حتى رسل، ترجمة خليل أحمد خليل، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، ص ص ٦٢-٦٣.

١ - واقعية رسل والتصورات المنطقية : Russell's realistic

يؤكد جودل على أن موقف رسل الواقعي (*) يتجلى في العديد من فقرات كتاباته، حين يقول "يهتم المنطق بالعالم الحقيقي مثل علم الحيوان Zoology، لكن مع ملامحه العامة والمجردة". إلا أن هذا الموقف أو السلوك قد تناقص بالتدرج على مر الزمان، وإن كان دائماً أقوى في الناحية النظرية منه في الناحية التطبيقية. وعندما بدأ في مشكلة معينة، تحولت الموضوعات المطلوب تحليلها (الفصول The Classes أو القضايا Propositions على سبيل المثال) في معظم الأحيان، إلى "خيالات منطقية" "Logical fictions". ولا يعني هذا المصطلح بالضرورة (وفقاً للمعنى الذي يستخدم به "رسل" المصطلح) أن هذه الأشياء غير موجودة، بل أننا لا ندركها إدراكاً مباشراً. (٢)

وقد أثار نقد الموقف الواقعي المشكلات الوجودية والمعرفية على حد سواء؛ لأسس موضوعات الرياضيات والتي هي "كيانات" مجردة مستقلة؛ أي تلك التي لها وجود مستقل، وعلى وجه التحديد: "الفصول اللانهائية infinite classes بوصفها مكتملة وتامة، ومجاميعها والتي قد تم اعتبارها إشكالية في حد ذاتها. وقد أثارت تساؤلاً حول قبول مبادئ مثل مبدأ الوسط الممتع وبديهية الاختيار، حيث يؤدي كلاهما إلى براهين وجود غير بنائية التركيب existence proof non constructive وخاصة في أوائل هذا القرن، والتي تمثلت في؛ متناقضات الفصول، التي أوجدها كانتور، وبوريل فورت، ورسل الذين شعروا بضرورة إعادة النظر الجذرية في نظرية المجموعات، وفلسفياً كانت الرؤية الأفلاطونية لأسس الرياضيات، والتي تراجعت أهميتها عند إدراك كيف حرر زارميلو نظرية المجموعات من التناقض. (٣)

(1) Gödel, K.: "Russell's Mathematical logic", op.cit, p. 126.

(*) بالرغم من إن رسل الذي بدأ سيرته رياضياً، إلا أنه قد مال إلى الاهتمام بالفلسفة رغبة منه في أن يجد مبرراً للاعتقاد في صدق الرياضيات. وكان قد أتجه إلى المثالية الهيكلية تحت تأثير مؤلفات ف. هبرادلي ولكنه سرعان ما ارتد عنها إلى صورة متطرفة من المذهب الواقعي بفضل جورج مور. وحجته القائلة "أن المبدأ الأساسي في المذهب المثالي وهو أن ما يُعرف يكون مشروطاً بمعرفتنا إياه" تتضمن إنكار أي صدق موضوعي للرياضيات. (الموسوعة الفلسفية المختصرة، مرجع سابق، ص ١٥٧) كما قام رسل بالتعاون مع مور برد فعل واقعي ضد المثالية الهيكلية الجديدة والمتمثلة في برادلي F.H. Bradley ورفاقه وكان هذا التيار هو الغالب في الفلسفة الإنجليزية. Pears, David & Kenny, Anthony: "Mill to Wittgenstein" in "The Oxford Illustrated; "History Of Western Philosophy", Oxford University Press, New York; 1994: p.253

(2) Gödel, K.: "Russell's Mathematical logic", p. 127.

(3) Solomon Feferman : In the light of logic, op.cit, p.142

أى يمكن لسلسلة من التجريدات المنطقية - متضمنة لدالات الصدق، حساب المحمول والمجموعات أن يتم تمييزها بين المناقشة الأصلية والرياضيات البحتة المعنية وبلا شك فإن هذا هو ما كان فى عقل رسل عندما كتب : " إن التعريف المنطقى للأعداد يجعل اتصالها بالعالم الفعلى للأشياء التى يمكن إحصاؤها مفهوماً ... " وهذا أيضاً ما كان فى عقله عندما كتب إن التحليل الدقيق للتفكير الرياضى يوضح ... أن أنماط العلاقات تعد موضوع الدراسة الحقيقى الذى يتم مناقشته، حيث تعتبر أجزاء من التفكير الرياضى وتعرض فقط أنماطاً للعلاقات. والعلاقات المتضمنة تعتبر - بالضرورة - علاقات منطقية؛ إن نظرية حساب القضايا، نظرية حساب المحمول، ونظرية المجموعات، نظرية الأعداد الأولية كلها تختلط بانسجام فى داخل بعضها البعض كأجزاء فى كل واحد. (١)

وحقاً أعلن رسل عن موقفه الواقعى فى كتابه مقدمة للفلسفة الرياضية حين قال " إن المنطق لا ينبغى أن يسمح بوجود غول أكثر مما يمكن أن يسمح به علم الحيوان، لأن المنطق يعنى بالبحث فى عالم الواقع كما يبحث فيه علم الحيوان، ولو أن المنطق يبحث فى ملامح العالم الأعم والأكثر تجريداً. (٢)

كان رسل، فى بادئ حياته الفلسفية، واقعياً لايقبل بأى وجود معرفى لما يسبق الحواس، سائراً على هدى جون لوك الذى لم يقبل إلا بالحواس وما تثيرة فى العقل من انطباعات سواء كانت ظاهرة فى العالم الخارجى أم داخلية فى عالم المشاعر والأحاسيس. الأمر الذى اتبعه فيه هيوم (*)، ذاهباً إلى إعطاء مصدر كل فكرة إحساساً ما، وكل فكرة يستحيل إرجاعها إلى مصدر إحساسى لاتعد فكرة تحمل معنى على الإطلاق. وبذلك تبنى هيوم أمبريقية صارمة ليحدد

(1) Jager, R: "The Development of Bertrand Russell's Philosophy", George Allen & Unwin, LTD., London, 1972., p.209.

(٢) برتراندرسل: مقدمة للفلسفة الرياضية، ص ١٨٣.
(* هيوم : دحض التفسير العقلى للسببية بوصفها رابطة ضرورية بين الأشياء، وأثبت أن فكرة السببية فكرة مركبة يمكن أن تحلل إلى عناصر أبسط منها (إلى فكرة التتابع المطرد على سبيل المثال) كل عنصر منها مستمد من الخبرة. أنكر التجريبيون الطابع القبلى للرياضيات والطابع التركيبى فجعل مل الرياضيات تعميمات من الخبرة، فالقضية الرياضية $٧+٥=١٢$ بمثابة قانون من قوانين الطبيعة قائمة على المشاهدة؛ وإذا لم يكن الحساب صادقاً بالضرورة، وإذا لم يثبت صدقه إلا عن طريق الخبرة، فإنه يظل من المحتمل أن تثبت الخبرة بطلانه أيضاً. ولهذا لجأ بعض التجريبيين للقضاء على تلك المفارقة إلى تقرير أن الرياضيات تحليلية وليست تركيبية، وتصبح الرياضيات - وفقاً لهذا التوجه - صادقة عن طريق التعريف؛ أى أن $٧+٥=١٢$ حقيقة ضرورية لا لشيء. إلا لأنها غير إخبارية على نحو ما. "أى لأننا نعرف ذلك". (فؤاد كامل وآخرون: الموسوعة الفلسفية المختصرة، ص ١١٣)

مصدر الأفكار ومدى المعرفة العقلية التي ليست إلا أحاسيس متجمعة في العقل الإنساني.^(١)

(١) إبراهيم يوسف النجار: برتراند رسل فكره وموقعة في الفلسفة المعاصرة، الجامعة الأمريكية، بيروت، ١٩٩٧، ص ٧٣.

كما كان فى "أصول الرياضيات" واقعياً بالمعنى الأفلاطونى، متأثراً بواقعية مينونج A.Meinong(*)، ذاهباً إلى القول أن كل ما يمكن أن يكون موضوعاً للفكر، وكل ما يرد فى قضية صادقة أو كاذبة، وكل ما يعد واحداً فهو "حد" وجميع الحدود "موجودة" أو "كائنة" والقضية نفسها كائنة بمعنى ما من المعانى، وهكذا تكون جميع القضايا وحدودها، وكل ما يمكن أن يكون موضوعاً للفكر كائنات، قد لا تكون موجودات فعلية، إلا إنها على الأقل لابد وأن تكون كائنة أو لها كيان، "فالأعداد وآلهة هوميروس والعلاقات والغيلان والأماكن ذات الأبعاد لها - جميعاً- كيان، لأنها لو لم تكن كائنات من نوع ما لما كان فى استطاعتنا أن نقول عنها أنها قضية".^(١)

أوضح رسل أن الميتافيزيقا ليست قضايا، وإنما هى دالة قضية Propositional Function، بمعنى إنها تقدم عبارة غير مكتملة، بينما المعرفة المباشرة هى تلك المعرفة التى نحصل عليها بالوعى المباشر بالشيء المعروف، دون وساطة الإستدلال. وبذلك تقتصر المعرفة من هذا النوع على المعطيات الحسية. بينما تمثل الميتافيزيقا نظاماً للتطبيقات العالمية التى يعتبر عدم التناقض من ملامحها الأساسية إذا، عندما "تقترح" حقيقة إمبريقية تفسيراً متسعاً، يجب أن تستنتج إنه - على الأقل - إحدى الحقائق الإمبريقية التى تقدم إقتراحات مضللة.^(٢)

٢- محاولة التجانس بين بديهيات المنطق والرياضيات وقوانين العلم الطبيعي :

يذهب جودل إلى أن رسل قام - أيضاً- بتوسيع التجانس بين الرياضيات والعلم الطبيعي، حيث قارن بديهيات المنطق والرياضيات مع قوانين الطبيعة والدليل المنطقى والإدراك الحسى، بحيث لا تحتاج البديهيات بالضرورة أن تكون بيينة فى ذاتها، بل يكمن فى برهانها (كما فى الفيزياء تماماً) فى حقيقة أنها تجعل من الممكن استنتاج هذه "المدركات الحسية"^(**). وهو بالطبع

(*) الكسيسوس مينونج (١٨٥٣-١٩٢٠) فيلسوف نمساوى وتلميذ برنتانو انشغل بفلسفة العقل فقدم تحليلاً ثلاثياً للخبرة الذهنية بما تنطوى عليه من فعل ومضمون وموضوع أى أن الخبرة الذهنية تتسم بالقصدية Intentionality، أما الفعل فمعناه الأسلوب الذى يوجه الذات نحو الموضوع، وأما المضمون فهو الذى يوجه الذات نحو موضوع دون آخر. (يوسف كرم، مراد وهبه ويوسف شلاله، المعجم الفلسفى، الهيئة المصرية العامة للكتاب، ٢٠١٦، ص ٧٦٢).

(١) محمد مهران: فلسفة برتراند رسل، دار المعارف القاهرة، طبعة ثالثة، 1986 وأيضاً محمد مهران: دراسات فى فلسفة اللغة، دار قباء للطباعة والنشر والتوزيع، القاهرة، 1998 ص ٤٥.

(2) Feibleman, James: "A Reply to Bertrand Russell's Introduction to the 2nd Edition of "The Principles of Mathematics", in "The Philosophy of Bertrand Russell", Edited By; Paul A. Schilpp, Northwestern University, Evanston & Chicago, 1944., p.174

(**) المدركات الحسية : يذهب رسل إلى أنها ظواهر الأشياء حين تلتقى فى أماكن تكون فيها أعضاء الحس والأجزاء المناسبة من الجهاز العصبى جزءاً من الوسط المعترض فى الطريق؛ الأمر فى ذلك هو بالضبط كالأمر فى لوحة فوتوغرافية، وكذلك المخ يتلقى انطباعات - من الأشياء- مختلفاً حين تكون العين والعصب

ما لا يستبعد أن يكون لها نوع من القبول الذاتي ، مشابه لذلك الموجود في الفيزياء. ويعتقد جودل أن هذه الرؤية (بشرط أن يكون "الدليل" مفهوماً بمعنى دقيق ومحدد) تبررها تطورات لاحقة، ومن المتوقع أن تستمر كذلك في المستقبل.^(١)

كما شهد تاريخ الفلسفة اتجاهين رئيسيين قسّما الفلاسفة إلى مجموعتين : الاتجاه الرياضى بمعنى الرياضيات عند فيثاغورس، والتي تكون فيه الرياضيات ضرباً من المعرفة قريباً من التصوف، يبلغ اليقين ولايستخدم الحواس، تلك هى الفلسفة المثالية التى تنتسج من العقل فلسفاتها متسقة الأجزاء فى بنائات متكاملة، وأما الاتجاه الثانى فهو اتجاه طبيعى تجريبى، يجعل تجربة الحواس وسيلة المعرفة، أما الفلسفة التحليلية فقد استطاعت أستخراج العنصر الفيثاغورى من أصول الرياضيات وبيان أن قضاياها تحصيل حاصل، وما تنتهى إليه من نتائج تتفاوت فى درجة احتمالها لليقين دون أن تبلغ اليقين الكامل، وفرقت بين "القضية التكرارية" فى الرياضيات والقضية " الإخبارية" فى العلوم الطبيعية. وجاءت المدرسة التجريبية التحليلية الحديثة (باركلى وهيوم). لتدمج الرياضيات مع العلوم الطبيعية فى بناء واحد، وتطور منهج البحث أداة منطقية قوية.^(٢)

شكّلت مناقشة اللامعرفات الجزء الأساسى من المنطق الفلسفى لمحاولة إيجاد حقيقة وتفسير واضح لطبيعة تلك الكينونات المعنية وبذلك فإن العقل ربما يتمتع بذلك النوع من المعرفة بها التى تتماثل مع نوع المعرفة باللون الأحمر أو مذاق الأناناس. هذا هو الشكل المنفرد الذى وضعه رسل على الرغم من أنه لم يكن بمفرده الذى اعتقد فى أن الحدود المنطقية، التى بحث عنها ، تتميز بنوع من الواقعية مثل الأناناس. وإذا كانت من اللامعرفات فإنها- مع ذلك - أكثر واقعية، مع ضرورة إيجاد أساس موضوعى راسخ لإعادة البناء الدقيق. وفى الفصل الأول من الأصول نجد أن هناك ستة مصطلحات أو حدوداً قد تم اختيارها ، ولا يمكن تعريفها بواسطة أى شىء آخر وهى كينونات منطقية ، وهى تعدّ ضرورية للرياضيات.^(٣)

إذ يعتقد رسل أن الإدراك العام بأننا نعرف شيئاً ما عن العقل وشيئاً عن المادة، بالقدر الذى يسمح لنا بإدراك اختلاف كل منهما عن الآخر، حتى وإن كان اختلافاً طفيفاً، إلا أن ما نعرفه عن طريق استدلالنا، والتى تعد معرفة ذهنية، تماماً كتلك التى نعرف بها العالم الفيزيائى

البصرى جزأين من الوسيط المعترض، ويسمى الأنطباع الناشئ إدراكاً حسياً. (زكى نجيب محمود : نوابغ الفكر الغربى ٢ برتراندرسل، دار المعارف بمصر، القاهرة، ص ص ١٦١-١٦٢).

(1) Gödel, K. : " Russell's Mathematical logic", p. 127.

(٢) زكى نجيب محمود: برتراند رسل نوابغ الفكر الغربى ٢، ص ص ٤٣-٤٥.

(3) Jager , R: "The Development of Bertrand Russell's philosophy ", George Allen and Unwin, LTD., London, 1972, P. 115.

بما يتعلق ببعض السمات المجردة لبنية الزمكان، والتي يصعب، مع تجردها، معرفة ما إذا كان العالم الطبيعي يختلف، في سماته الجوهرية، عن موضوعات عالم العقل أم لا. إذ أن ما ندركه خارج ذواتنا يسمى عالم الطبيعة، هذا المصطلح يتضمن كل الأشياء والتي تعد "مادة" وحادثات، كما يسمح لنا الإدراك باستدلال ما لم ندركه بالفعل، مثل مركز الأرض، الجانب الآخر من القمر، أفكار الآخرين. أي أن يستدل على شيء مادي أو حادثة ربما تم إدراكها أو لم تتم عن طريق فرد ما. فهناك أشياء فيزيائية مازالت لم يدركها احد بعد. (١)

تقتصر المعرفة المباشرة، بوجه عام، على الوعي المباشر بالشيء المعروف دون وساطة، ومن ثم تعتمد على معطيات الحس، إلا أنها تتسعدى رسل لتشمل بعض الكليات ويسمى الوعي^(*) بالكليات تصوراً ذهنياً ويسمى الكلى الذى يعيه الفرد تصوراً أو مفهوماً. ويظل هذا النوع من المعرفة المباشرة رغم اتساعها عن المفهوم العام إلا أنه أضيق من أن يحتوى كل المعارف الأساسية التى تعد ضرورية لفهم العالم ولهذا كان لابد من تجاوز الخبرات الخاصة للتمكن من معرفة الأشياء التى لا تقع فى نطاق الخبرة، فما كان من رسل إلا ليجسد بديلاً وجسراً فكان المعرفة بالوصف، أى معرفة الشيء من خلال خصائصه وسماته وخواصه دون أن نكون على معرفة به معرفة مباشرة، وهكذا تظل المعرفة المباشرة، هى أساس المعرفة بجميع أنواعها. وفى ذلك يقول رسل " إن المعرفة جميعها سواء كانت معرفة بالأشياء أو بالحقائق إنما تقوم على المعرفة المباشرة كأساس لها". (٢)

اعتقد رسل أن كل معرفة تتعلق بالأشياء الموجودة فعلاً (عالم الخبرة) ذات قيمة ضئيلة بالمقارنة بتلك المعرفة الأخرى التى تتمثل فى الفلسفة والرياضيات مما يتعلق بالأشياء المثالية

(1) Bertrand Russell: Human Knowledge Its Scope and Limits, Published by Simon and Schuster, New York, 1948, p.p. 224-225.

(*) هل يمكن لنا القول أن رسل يحاول التجانس بين المدركات الحسية والعقلية من بعد فلسفياً، ومتتبعاً خطى ابن سينا. إذ للإدراك فى الفلسفة معان عدة: فهو حصول صورة الشيء عند العقل، سواء كان ذلك الشيء مجرداً أو مادياً، جزئياً أو كلياً، حاضراً أو غائباً، حاصل فى ذات المدرك أو آتية؟ وقد ذهب ابن سينا. إلى أن إدراك الشيء هو أن تكون حقيقته متمثلة عند المدرك، يشاهدها ما به يدرك، فإما أن تكون تلك الحقيقة "نفس" حقيقة الشيء الخارج عن المدرك إذا أدرك، فتكون حقيقة مالا وجود له بالفعل فى الأعيان الخارجية، مثل الأشكال الهندسية. أو تكون "مثالاً" حقيقته مرتسماً فى ذات المدرك غير مباين له، وهو الباقي. إذا فالحقيقة المتمثلة عند المدرك ليست نفس حقيقة الشيء الخارجى، إنما هى مثال لها مرتسم فى ذات المدرك. وإذا دلّ الإدراك على تمثّل حقيقة الشيء وحده من غير حكم سمي تصوراً. وإذا دلّ الإدراك على تمثّل حقيقة الشيء مع الحكم عليه بنفى أو إثبات سمي تصديقاً، وبذلك يتدرج معنى الإدراك من الإحساس وحده إلى حضور صورة المشعور به فى الشاعر، ثم الكمال لمزيد من الكشف لما يحصل فى النفس من الشيء المعلوم من جهة التعقل بالبرهان. وكما يتناول الإدراك الحس والخيال والوهم والعقل يتناول أيضاً، إدراك الذوق وإدراك الحدس).
جميل صليبا : المعجم الفلسفى، دار الكتاب اللبنانى، بيروت، 1982، ص ص ٥٣-٥٥

(٢) محمد مهران: فلسفة برتراند رسل، ص ٢٩٧-٢٩٩.

الخالدة التي تحررت من ريقة هذه الحياة^(١) بحيث يكون معيار "الاتساق" أساساً لصدق العبارات - كما يراه المثاليون - أي أن تكون العبارة على إتساق مع غيرها بحيث لا يكون ثمة تناقض فيما يقال؛ ففي الهندسة على سبيل المثال، تكون النظرية صواباً متى اتسقت مع سائر النظريات ومع سائر الفروض والتعريفات والمسلمات، بحيث تجيء نتيجة محتومة لما سبقها ومقدمة ضرورية لما بعدها، فإذا كان بين أجزاء البناء الهندسي مثل هذا الاتساق كان بناءً صحيحاً. أما المدرسة الواقعية الجديدة التي تأخذ من العلم مبادئه ومناهجه ومدركاته الكلية وتبدأ بالتحليل متبعين منطق تحليلي فمعيارهم في الصدق هو "التطابق" بين القول والموضوع الذي قيل فيه ذلك القول، إذ أن المعرفة بهذا الشيء الموجود خارج الذات تتم من خلال الكشف عنه وتحديد المعرفة به في عبارات، ولهذا يجب أن يكون ثمة تطابق بين الوصف والموصوف، مما أدى إلى ضرورة وضوح الأسلوب وتحليل العبارات لبيان خلوها من الغموض فكانت المدرسة الوضعية المنطقية؛ التي جاءت فرعا من "الواقعية الجديدة" ونتيجة للتحليلات المنطقية التي قام بها رسل في كتابه "أصول الرياضة" و"أسس الرياضة" للكشف عن طبيعة الرياضة والمنطق بواسطة تحليل قضاياها^(٢).

لقد اتضح أنه على افتراض اتساق الرياضيات الحديثة فإن حل المشكلات الحسابية يتطلب استخدام افتراضات ما حسابية جوهرية مفارقة، أي من نوعية الدليل الأولي غير القابل للجدل والذي يمكن مقارنته بالإدراك الحسي^(٣).

قارن جودل بين الحدس الرياضي والإدراك الحسي، قائلاً لدينا شيء يشبه إدراك موضوعات نظرية المجموعات يمكن ملاحظة أن حقيقة البديهيات تفرض علينا نفسها بأنها صحيحة. وتجبرنا على التسليم بصحتها وصدقها. شارك جودل فكرة الحدس كما عند هوسرلحين أشار إلى أن حدسية الموضوعات أكثر جوهرية. وكما هو واضح من السؤال عن التصور والمجموعات. ترك جودل الأمر غير واضح هنا سواء اعتقد بأن موضوعات الحدس الرياضي هي قضايا، كما في العبارة الواردة في مقولته ١٩٥٥ قال جودل "التشابه بين الحدس الرياضي والحس الفيزيقي دقيق للغاية، من المؤلف اعتبار أن "هذا أحمر" معطى مباشر، ولكن هل تعبر القضية عن إثبات التالي أو استدلال تام؟ وللاختلاف، كما هو واضح هنا، أنها تتكون من واقعة حقيقية في الحالة الأولى أي علاقة بين تصور وموضوع جزئي تم إدراكه، بينما في الثانية،

(١) برتراند رسل: محاورات برتراند رسل: شيخ فلاسفة العصر، ترجمة جلال العشري، الهيئة المصرية للكتاب، 1979، ص ٢٤٨.

(٢) زكي نجيب محمود: برتراند رسل نوابغ الفكر الغربي ٢، ص ٣٨-٤٣.

(3) Gödel, K. : "Russell's Mathematical logic", p.128.

فإنها تعد علاقة بين تصورات " (١).

يبدو من المحتمل أنه لتحديد أمور محددة لنظرية مجردة، تتعلق بنظرية الأعداد الحقيقية، سوف يحتاج الأمر إلى بديهيات جديدة، قائمة على فكرة ما مجهولة. ربما أيضاً تكون الصعوبات التي لا يمكن التغلب عليها والتي فرضتها المشكلات الرياضية الأخرى لعدة سنوات؛ ناتجة عن حقيقة أن البديهيات الضرورية لم يتم العثور عليها بعد.

في ظل هذه الظروف قد تفقد الرياضيات قدراً كبيراً من "يقينها المطلق" (*)، وهو ما حدث بالفعل تحت تأثير النقد الحديث للأسس، وهناك بعض التشابه بين هذا المفهوم لدى "رسل" وبين "إمداد بيانات الحدس الرياضي" لدى "هلبيرت"، عن طريق هذه البديهيات، والقواعد مثل "قانون الوسط الممتنع"، الذي لا يقدمه الحدس وفقاً لرؤية "هلبيرت"، مع ذلك يبدو أن الخط الفاصل بين البيانات والافتراضات المسبقة يمكن أن تظهر في أماكن مختلفة، وفقاً لما إذا كنا نتبع "هلبيرت" أم "رسل". (٢)

ووفقاً لهذا، فإن نظرية دالات الصدق، عند رسل، تتخذ نوعين من الأشياء باعتبارها بيانات:-

(١) مجموعة من القضايا البسيطة كل ما فيها يجب أن ينظر إليه باعتباره إما صادق أو كاذب ولكن لا تكون صادقة وكاذبة في آن واحد.

(٢) إن بيان الثوابت المنطقية - و، أو، إذا، إذن فقط إذا زائد السلب (كل المعارف بلغة عدم التوافق: "لا أو لا...." أو الإنكار المتصل: "لا - ولا.....") تلك الروابط، على الرغم من أنها تعد عناصر أساسية في الحديث العادي، فإنه يجب شحذها قليلاً من أجل تهذيب الغموض بما أن المنطق الصوري لا يمكنه أن يتسامح مع عدم الدقة (مثال: "و" يعتقد فيها إلى حين "أو" تؤخذ كـ "و" أو "و" وإذا..... إذن الذي يعد تضميناً مادياً يجب أن يتم تنظيمه بشكل قاطع، كما سنرى) وباختصار فإن النظرية هي أن: أنها قيمة الصدق المتعلقة بالذرات والمعنى للروابط هي التي - وحدها - تحدد قيمة الصدق للقضايا الجزئية p. وليس للمعنى اللغوي للعبارات أي علاقة بتحديد قيمة الصدق.

(1) Dagfinn Follesdal: "Introductory note to 1961", IN "Kurt Gödel Collected Works" IN "، Edited by Solomon Feferman & John W. Dawson Dagfinn Follesdal, Oxford University Press, New York Oxford, v.3, 1995, P.370.

(*) اليقين التام: absolute certainty هو اصطلاح يستخدم ليعنى الصدق المطلق الذي عنى به أرسطو، برهان جوهرى بالمعنى الصارم، استخرج بالإستنباط من مقدمات صادقة صدقاً مطلقاً، ويستخدم اصطلاح "اليقيني" للتفريق بين حكم ضرورة وحكم إدمكان وحكم واقع (م روزنتال: مرجع سابق، ص ٥٩١)

(2) Gödel, K.: "Russell's Mathematical logic", p. 128.

المعنى اللغوي ، وإنما فقط على أساس قيمتي الصدق ، والكذب اللتين يمكن نسبتها إلى كل منهما. (١)

اختلف المفهوم العقلي والتصور للعلاقة في المنطق الصوري التقليدي ، والمنطق في ثوبه الجديد ، وتلاشي اقتصار "المحمول" على الحمل بمعناه الضيق ليشمل مفهوماً أعم " التصور " والأوصاف والفصول؛ وكل ما يندرج تحت مفهوم العلاقات. لم يعد الحد الأوسط صاحب الكلمة الأولى والأخيرة للحكم باتساق القياس من عدمه، ففاقت قدرته علاقات أعم، ولكن يبقى الاعتماد الكلي على الجانب السيمنطيقى للقضايا ومدلولات الألفاظ.

جسدت الخطوة الهامة نحو السعي لتحقيق الأنساق الصورية formal systems تلك التي اتخذها كل من وايتهد، ورسل في كتاب برنكيبيا الذي يتضمن ثلاثة أجزاء (١٩١٠-١٩١٣)، على الرغم من أنه مازال يتغلغل بعض أجزاءها الغموض. ولقد لاقى مصطلح "النسق الصوري"، الذي افترضه فريجه ، قبولاً واسعاً عام ١٩٢٠. وفي هذا النسق عالج الرموز وفقاً لقواعد تتجاهل تأويلات الرموز، وتتعامل - ببساطة - مع علامات مكتوبة بحيث تصبح هناك صياغة جيدة وبراهين. وكانت فكرة رد الرياضيات لصياغات مجردة وبراهين؛ تلك الصياغات والبراهين التي أصبحت هي موضوع العلم الجديد، نظرية البرهان أو الرياضيات، والتي يتم فيها الدراسة من خلال أي منهج يدعم الحدس، إدراك المدركات : حيث يتم إدراك الرموز، نستمد ونستخلص صيغة محددة من صيغ معطاة من خلال قواعد التعويض، نستخدم الاستقراء في طول الصيغ. مما يعطى القوة. لهذا المنهج. أمل هلبيرت أن يخضع منهج اتساق البراهين للأنساق الصورية. (٢)

اقترح هلبيرت (*) إضفاء الطابع الصوري للنظريات الرياضية، أملاً أن يكمل ذلك على كل الرياضيات حتى الوصول إلى مواجهة المتناقضات، في الأنساق الصورية، وعادة صورية الرياضيات سوف تكون مثالية وغير مدعومة بحدسنا، ولهذا أراد هلبيرت البحث عن نسق خارج

(١) محمد ثابت الفندي: فلسفة الرياضة، ص ص ١٣٦-١٣٧.

(2) J. Van Heijenoort : "Gödel's theorem" , P. 349.

(*) إذ حاول هلبيرت حل صعوبات عقلنة الرياضيات والمنطق بصياغتهما استناداً إلى البديهيات والمنهج البنائي Constructive method لتطوير نظرية ما على عكس المنهج البديهي، فاهتم بتصوير فكرة المنهج التكويني ، الذي يعمل على التقليل من القضايا والحدود غير المعرفة مما هو أولى ولا يقبل البرهان ، فيقوم بإنشاء متسلسل للأشياء المتناولة كنظام، والعبارات الخاصة بهذه الأشياء. وتكوين نظريات عن طريق كيان من القواعد والتعريفات الخاصة. وتستخرج جميع العبارات الأخرى للنظام من الأساس الأولى بواسطة استدلال خاص يميز النظريات البنائية ويقوم على مبدأ الاستقراء الرياضي. م. روزنتال و يودين : الموسوعة الفلسفية ، مرجع سابق، ص ص ٥٠٤-٥٠٥ .

إطارها. فكان النسق الصوري، والذي يبدو- تماماً- كبنية تركيبية (جزء من المعانى أو المعانى التى يفترض أن تعبر عنها الرموز، والتي ترشد ممارسات علماء الرياضيات، بناء نسق من الموضوعات المحددة، والرموز (مجموعات لاحصر لها يمكن عدّها)، ومتواليات محدده تسلسل محدود من الرموز (مثل تلك التى تشكل الصيغ)، وتسلسل محدود من تسلسلات محدوده من الرموز (والتي تشكل البراهين). وبذلك تكون هناك إمكانية لتطبيق دراسة نسق صوري حدسى ومناهج الإستدلال فى الجزء الواقعى للرياضيات، يستخدم فقط اللانهائية المحتملة Potential infinities والتي يطلق عليها هيلبرت Finitary نهائية^(١).

وكان كلُّ من هلبيرت وبرور^(*) من أكثر الشخصيات المؤثرة الذين يدعمون مخططات تأسيسية بديلة خلال الفترة التى بدأ فيها جودل عمله فى المنطق. فقد وضع هلبيرت برنامجاً لحماية وتأمين الرياضيات يشمل - كما تمنى - نظرية المجموعات^(**) لدى كانتور، عن طريق براهين الاتساق للأتساق البديهية الصورية. بينما رفض برور براهين الوجود اللابنائية والمفاهيم الكانتورية عن فصل "اللامتناهى" سعياً لإعادة بناء الرياضيات وفق رؤيته الحدسية كنوع من البنائية. وفى فيينا كان الإهتمام منصباً على برنامج المنطق التجريبي الذى تطور على يد هاهان، وشيليك، وكرناب وآخرين، وكانت دعواهم، لإحلال الرياضيات بقواعد المذهب الإصطلاحى لتركيب بنية اللغة syntax of language، وهكذا يفصلها عن العلوم الطبيعية^(٢).

وإذا تتبعنا المسألة، بشكل ملائم، نجد أن هذا التضاد يفتح فهماً تاريخياً مختلفاً " للمنطق " أكثر مما توقع رسل. فلنأخذ فى الاعتبار، على سبيل المثال، حساب الفصول أو نظرية

(1) Stephen c. kleene : "Kurt Gödel A biographical memoir", p.p. ١٥١-١٥٠

(*) برور: عالم رياضيات هولندى، أسس مدرسة فى فلسفة الرياضيات أطلق عليها المذهب الحدسى الرياضى المعاصر، فصل الرياضيات فصلاً تاماً عن اللغة، ذاهباً إلى أنها فعالية غير لغوية للعقل أصلها ماثل فى إدراك حركة الزمان بتجردها من كل كيفية تتحول إلى صورة فارغة الذى هو الحدس؛ وموضوعه هو الكيانات الرياضية. (معن زيادة : مرجع سابق، ص ٤٩٩).

(**) نظرية المجموعات theory of set: تأسست على يد كانتور وتعد فرعاً من فروع الرياضيات، الذى يهتم بتناول مقولات اللامتناهى بالمناهج الدقيقة، وموضوعاتها هى خواص المجموعات (الكليات، والفئات، الفصول) التى تكون، فى معظمها، متناهية والمبدأ الرئيس فى نظرية اللامتناهيات إنشاء "نظم" مختلفة للاتناهى. وتنطلق النظرية من إدراك تطبيق مبادئ المنطق فى مجال المتناهى على المجموعات اللامتناهية. وفى نهاية القرن التاسع عشر، نشأت عن تطور نظرية المجموعات بعض الصعوبات مثل المفارقات المرتبطة بتطبيق قانون الثالث المرفوع على المجموعات اللامتناهية. مثل طبيعة المفاهيم الرياضية، علاقتها بالعالم الواقعى، المحتوى العينى لمفهوم الوجود فى الرياضيات. الأمر الذى أدى إلى ظهور تيارات مثل النزعة الصورية والحدسية. فجميع مشكلات إثبات الرياضيات بالوسائل المنطقية ليست سوى مشكلات إثبات نظرية (المجموعات). م. روزنتال ويودين : الموسوعة الفلسفية، ص ٥٤١).

(2) Solomon Feferman : In the light of logic, in Logic and computation in philosophy , p.142

المجموعات؛ فمن غير الدقيق؛ القول أن رسل ووايتهد كانا يبحثان على النسق الواحد الصحيح والصادق للنظرية والتي ستكون نظرية المجموعات للرياضيات ولكن فيما بعد رأى علماء المنطق هذا النسق باعتباره واحداً بين العديد، كلٌّ منها لديه خواص صورية مختلفة وشيقة، وكلاهما يمكن تفسيره بطرق تتوافق مع حقائق الرياضيات. إن نظرية المجموعات تختلف، بشكل أساسي، فيما يتعلق بالبدهييات التي تعلنها ولكن - أيضاً - فيما يتعلق بما هو مقصود بإدعاءات الوجود التي تصنعها البدهييات وتختلف من حيث الكيفية التي يتم بها تشكيل الفئات وهذا - بدوره - يتم إملاؤه - جزئياً - من خلال اعتبارات الأنماط. وفي الأساس من خلال الحاجة إلى تجنب متناقضة رسل الخاصة بالفصول التي ليست أعضاء في ذاتها (أو أي تناقضات أخرى والآن لكى نفكر فى نظرية المجموعات لتكون مؤلفة من مجموعة من البدهييات المختارة احتياطياً داخل تلك المقاييس لم يكن هو ما فى عقل رسل .

إن الاكتشاف الحديث بأن البدهيية عن وجود المجموعات ذات مقياس معين (فروض كانتور المتصلة على سبيل المثال) مثل إما أن تكون أو يمكن لنفيها أن يضاف إلى نظرية مجموعات متماسكة بدون إحداث كارثة - فإن هذا يذهب مضاداً لضروب كل الأشياء التي كانت متوقعة. ليس هناك ما يوضح ما إذا كان رسل عالم منطق منذ الخمسين عاماً الماضية سيذكر شيئاً عن هذا، إذ يستلزم الأمر وضع نظرية المجموعات الخاصة " بالمنطق " داخل سياق معين لم يخيل له. لقد أوضح فى عام ١٩٣٧ فى مقدمته لكتاب " الأصول " : إن فهمه لعلاقة نظرية المجموعات للرياضيات يتطلب نوعاً من الحقيقة الموضوعية وهى أن تكون البدهييات إما صادقة أو كاذبة وأيا كان ما يعنيه هذا فإنه قد قصد ليعنى أكثر من مجرد تماسكهم (١).

ظل رسل رافضاً لنظرة الفلسفة التحليلية اللغوية التي ترى إلى أن حدود الفلسفة هى اللغة .. بينما الفلسفة ، فى نظره، هى تحليلية ولكن حدودها تتخطى اللغة إلى مدلولاتها. وليست اللغة إلا سبيلاً تستخدمه للتوصل إلى مدلولات اللغة فى الأشياء والعالم. ولهذا اعتمد على المنطق فى تحليله للمشكلات الفلسفية، عن طريق التحليل المنطقى واللغوى؛ بصياغة معرفتنا بصياغة صورية دقيقة. (٢)

إلى جانب محاولة رسل لتأسيس علم الحساب ،على أساس منطقى ، كانت هناك رغبة لعرض اللغة ،غير الرياضية، فى شكل منطقى واضح وهذا هو ماجعل رسل _ مع فريجه _ أحد

(1) Jager , R: "The Development of Bertrand Russell's Philosophy ",Op.cit., p.p 216-217.

(٢) إبراهيم يوسف النجار: "الفلسفة التحليلية من هيوم إلى رسل" الفكر العربى، مجلة الإنماء العربى للعلوم الإنسانية والفلسفة والعلوم"، العدد ٦٣، السنة الثانية عشر مارس، بيروت، ١٩٩١، ص ص ٦٢-٦٦.

مؤسسى التحليل المنطقى فى الفلسفة التحليلية اللغوية وكان ينظر إليه باعتباره نظاماً لاستبدال الصور الواضحة منطقياً للكلمات عوضاً عن الصور اللفظية ، والتي كانت - بطريقة ما- مضللة منطقياً. ولقد ظهر أول تصنيف على مسرح الفلسفة البريطانية فى مقالة لرسل "فى الدلالة".^(١)

٣- نقد جودل للوصف المحدد فى الدلالة: On denoting:

اختار رسل للمعالجة المفصلة ، بشكل خاص ، عبارات تبدأ "إل" وعبارات سيسميها، فيما بعد، بالأوصاف المحددة"، والتي نظر إليها باعتبارها أكثر العبارات الدلالية صعوبة ومتعة^(٢)

يشير جودل إلي أن معالجة رسل لأداة التعريف الـ^(*) فى تحليله للتصورات المنطقية الأساسية، والتي جاءت محاولة للإجابة عن السؤال : الإمتدلالعبارات الوصفية؟ تؤدى إلى غموض، مثل "مؤلف ويفرلى" أو "ملك انجلترا الحالى" وما معنى العبارات التي تظهر فيها تلك الأوصاف؟ وتأتى الإجابة موضحة بأن "مؤلف ويفرلى" تدل على "التر سكوت"، تؤدى إلى صعوبات غير متوقعة. وإذا اعترفنا بالبديهية الواضحة، بأن دلالة التعبير المركب، الذي يحتوي على مكونات لها دلالتها بدورها، يعتمد - فقط - على دلالة هذه المكونات (وليس على طريقة التعبير عن هذا المدلول)، ويترتب على ذلك أن العبارة "سكوت هو مؤلف ويفرلى" تدل على الشيء نفسه فى العبارة "سكوت هو سكوت"؛ ويؤدى ذلك، مرة أخرى، إلى استنتاج أن كل القضايا الصادقة لها الدلالة نفسها، بالإضافة للقضايا الكاذبة أيضاً. ولقد استقى "فريجه"، فى الواقع، مثل هذا الاستنتاج؛ وكان يقصده بالمعنى الميتافيزيقى، متتبعاً خطى ونهج المذهب الأيلى لفكرة "الواحد- وفقاً لرؤية "فريجه"- فإن "الصادق" يتحلل بواسطة بعدة أشكال مختلفة فى عدة قضايا مختلفة؛ وهو يستخدم "الصادق" كاسم ليعبر عن الدلالة العامة لكل القضايا الصادقة.^(٣)

وجدير بالذكر أن القضايا الأخرى ، التي نحتاجها، للحصول على برهان قوي قد تكون:^(٤)

(١) أن " $\varphi(a)$ " والقضية "a هي الشيء الذي له الخاصية φ ويتطابق مع a" يعينان نفس الشيء

(٢) كل قضية "تحدث عن شيء ما"، أي يمكن صياغتها فى الشكل $\varphi(a)$.

الأكثر من ذلك، قد نضطر لاستخدام حقيقة أنه لكل شيئين a, b, توجد قضية صادقة

(1)David Pears & Anthony Kenny : "Mill To Wittgenstein", p.p. 252-253

(2) Ibid ,p.p. 242 - 243

(*) وقد أبرز "بيانو" الوجهة الرمزية لأداة التعريف "ال" وحصل على نتائج ذات فائدة كبرى فى حساب التحليل، بينما استخدمها رسل من الناحية الفلسفية مشيراً إلى أن استخدام التتابع ونظرية التعريف يتوقفان على فكرة أداة التعريف. (برتراند رسل، أصول الرياضيات، ج١، ص ١١٦).

(3)Gödel, K... "Russell's Mathematical logic", p.p.128-129 .

(4) Ibid., p.129 .

بالشكل $\varphi(a, b)$ ، أي $a = a \cdot b = b$ أو $a \neq b$.

وضّح رسل . أيضاً. أن أداة التعريف إذا استخدمت استخداماً صحيحاً فيجب أن تستلزم التفرد، وعلى ذلك يمكن القول إن "العلاقة R مع x" موجودة متى كان هناك حد واحد، لأكثر، له العلاقة R مع x، وعلى ذلك فإذا كانت R علاقة واحد بكثير "فالعلاقة R مع x" موجودة كلما كان x منتبياً إلى ميدان R العكسي. بوصفها دالة وإذا اعتبرنا "العلاقة R مع x" دالة بالمعنى الرياضى فنقول إن x هو "متغير" الدالة، وإذا كان y هو "العلاقة R مع x" فسيكون y هو قيمة الدالة للمتغير x، وإذا كانت R علاقة واحد بكثير، فمدى المتغيرات المحتملة للدالة هو الميدان العكسي للعلاقة R، ومدى القيم هو الميدان. وعلى ذلك فمدى المتغيرات المحتملة للدالة "والد X" هو كل أولئك الذين لهم آباء، أي الميدان العكسي للعلاقة "والد"، بينما مدى القيم المحتملة للدالة هو جميع الآباء، أي ميدان العلاقة. (١)

وبذلك تصبح لعلاقات الواحد بالكثير فائدة كبرى، وبيانو، الذى كان، لسبب ما، يتصور بالغريزة، العلاقة على أنها علاقة واحد بكثير، يعالج بهذه الطريقة تلك العلاقات التى ليست كذلك، ولذلك رد العلاقات إلى علاقات واحد بكثير بهذه الطريقة، على الاعتقاد بأنه لا يمثل تحليلاً فلسفياً، ويكفى فى ذلك أن الفصول يجب اعتبارها "دوال منطقية" اعتبار علاقات واحد بكثير على أنها نوع خاص من العلاقات. (٢)

يذهب رسل إلى أن "المحمولات ... تصورات" ولا "تدل المحمولات على تصورات" فعلى سبيل المثال "سقراط يكون شيء" وليس "سقراط يدل على شيء"، والسبب الذى أعطاه رسل لقوله بأن "سقراط شيء"؛ بأن سقراط لا يمكن . مطلقاً. أن يرد إلا كحد فى قضية وينبها إلى أن المقصود هنا هو سقراط نفسه وليس الإسم هو الذى يرد أو يظهر فى القضية. ولهذا فلا يمكن أن ندافع - طبقاً لوجهة نظر رسل - عن أى وجهة نظر تكون فيها الحدود والقضايا لغوية بينما تكون الأشياء والتصورات دلالتها. (٣)

وفى تحليل العبارات الدالة، فلا يجب افتراض أن كل رمز منفصل مستقل له دلالة، أو كل عبارة لها دلالة مستقلة يمكن أن يكون لجزء من العبارات الدالة، ولكنه ليس دالاً بمفرده. وسريعاً ما تظهر أن فئة الرموز يمكن أن تُعامل باعتبارها أوصافاً أى أنها ليست أجزاء دالة فى

(١) برتراندرسل : مقدمة للفلسفة الرياضية، مرجع سابق، ص ص ٥٢-٥٣ .

(٢) المرجع نفسه، ص ص ٥١-٥٢ .

(3) Klemke, E.D.: "Logic and Ontology In Russell's Philosophy", in "Essays on Bertrand Russell", Edited By; Klemke, E.D., University of Illinois Press, London, 1970, p. 421

العبارات الدالة وهذا ما يجعل حل المتناقضات بوجه عام ممكناً ولقد عرض رسال لحل الجزئي في أصول الرياضيات، موضحاً إن نظرية الأوصاف كوسيلة لحل المتناقضات قد دفعته للانتباه إلى مشكلة المعنى والدلالة، وتعريف المعنى إضافة إلى الألفاظ والدلالة إضافة إلى القضايا -وهي مشكلة مركبة قد تعامل معها في تحليل العقل.⁽¹⁾

ووفقاً لرؤية "رسل" ما يتفق مع القضايا في العالم الخارجي هي الوقائع Facts. مع ذلك، فهو يتجنب المصطلح "يرمز" أو "يدل على" ويستخدم "يحمل" بدلاً منهما (في كتاباته المبكرة ويستخدم "يعبر" أو "يكون رمزاً لـ")، حيث تختلف العلاقة بين القضية وبين الواقعة، إلى حد كبير؛ عن العلاقة بين الاسم والشيء المسمى به. الأكثر من ذلك، أنه يستخدم المصطلح "يدل على" (بدلاً من "يرمز") للعلاقة بين الأشياء والأسماء، بحيث أن "يدل على" و"يشير" معاً يتفقان مع مصطلح يدل عند "فريجه"، ولهذا إذاً؛ ووفقاً لرؤية "رسل" ومصطلحاته، فإنه "تشير" القضايا الصادقة إلى الوقائع، بينما تشير العبارات الكاذبة إلى اللاشيء^(*). بذلك قد تطبق نظرية "فريجه" في المعنى إلى حد ما على القضايا الكاذبة، حيث أنها كلها تدل على الشيء نفسه، الذي هو اللاشيء، بينما قد تشير القضايا الصادقة المختلفة إلى أشياء عدة مختلفة.⁽²⁾

تتجلى هنا بوضوح محاولة جودل لتأكيد الترابط بين فكر فريجه وفكر رسل في توحيد مدلول عام لفكرة "الصادق"؛ مدلول القضايا الصادقة عند فريجه، و"اللاشيء" مدلول القضايا الكاذبة عند رسل. وبذلك فإن هذه الرؤية المتعلقة بالعبارات تجعل من الضروري - من وجهة نظر جودل - إما إسقاط المبدأ السابق ذكره عن دلالة التعبيرات المركبة في مصطلحات "رسل" عن الدلالة أو إنكار أن العبارة الوصفية تدل على الشيء الموصوف.⁽³⁾

يؤكد جودل أن "رسل" لم يقدم أي تعبير صريح عن الاقتراح الأول؛ لكن يبدو أنه قائم في النسق المنطقي في برنكيبييا، على أقل أو أكثر تقدير. بينما أختار الاقتراح الأخير؛ باتخاذ وجهه

(1) Russell, Bertrand: "My Mental Development", in "The Philosophy of Bertrand Russell", Edited By; Paul A. Schlipp, Northwestern University, Evanston and Chicago, 1944, p. 14

(*) من الدلالة "Bedeutung" العبارة تمييز ما يطلق عليه "فريجه" معناها (Sinn) وهو العلاقة التصورية لوجود الوقائع الموضوعي (أو "الصدق"). ويجب أن نتوقع أن يكون هذا في نظرية "رسل" وقائع ممكنة (أو احتمالية الوقائع)، وهو ما يوجد أيضاً في حالة القضية الكاذبة. لكن "رسل"، كما يقول هو، لم يمكنه أبداً أن يعتقد أو يفتنع بأن هذه الأشياء "الغريبة الغامضة" "curious shadowy" أشياء موجودة فعلاً. ثالثاً، هناك أيضاً علاقة نفسية بين الوقائع التي يطلق عليها "مدلول" وبين فهم ما يفهم بوصفه أنه الاعتقاد المقابل في أحدث كتب "رسل". وتستخدم "الجملة Sentence" في الاختلاف المضاد مع "القضية Proposition" للدلالة على التركيب المجرد للرموز.

(2) Gödel, K.: "Russell's Mathematical logic", p.129.

(3) Ibid, p.p 129-130.

النظر بأن "العبرة الوصفية لا تدل على شيء على الإطلاق لكنها ذات معنى فقط في سياق"؛ وعلى سبيل المثال، في عبارته المشهورة "مؤلف ويفرلي هو سكوت" ومعناها: "يوجد هناك كيان واحد كتب ويفرلي، وأياً كان من كتب ويفرلي فهو سكوت". ويعني ذلك أن الجملة التي تتضمن عبارة "مؤلف ويفرلي" لا تقرر بشكل جازم أي شيء عن "سكوت" (حيث لا يوجد بها أي مكون يدل على سكوت)، لكنها فقط طريقة ملتوية لتقرير شيئاً ما عن التصورات التي تحدث في العبارة الوصفية.^(١)

يقدم "رسل" بشكل أساسي حجتيين لتدعيم هذا الرأي:

١- ان العبارة الوصفية قد تكون ذات معنى وتستخدم حتى إن كان الشيء الموصوف غير موجود (مثلاً في العبارة "الملك الحالي لفرنسا غير موجود".

٢- قد يفهم الشخص جملة تحتوى على عبارة وصفية بدون أن يعرف الشيء الموصوف؛ في حين يبدو من المستحيل فهم عبارة ما بدون معرفة الأشياء التي تقرررها.

أعتقد رسل بأن من أجل ضمان موضوعية المفهوم فإنه من الضروري الاعتقاد في عالم ذات أفكار أفلاطونية في حين ذهب مور إلى أن "المفهوم لا يعد حقيقة عقلية، أنه شيء أبدى ثابت يتواجد مستقلاً عن تفكيرنا. كتب رسل عام ١٩٠٣ أن العلاقات والأعداد والفراغ رباعي الأبعاد كلها لها وجود حيث أنهم إذا لم يكونوا كينونات تنتمي لنوع ما فإننا لا يمكننا أن نضع قضايا عنهم، حيث أن الوجود هو صفة عامة لكل شيء ومن أجل ذكر أي شيء لتوضيح أنه هكذا، ومن ثم فالقضايا ذات الدلالات الفارغة لا تكون بلا معنى وإنما هي فقط كاذبة.^(٢)

يتابع جودل تحليل الأوصاف مؤكداً "أما حقيقة أن "رسل" لا يضع في اعتباره هذه المسألة كلها المتعلقة بتأويل الوصف على أنه مسألة اصطلاح لغوي بحث، بل كمسألة الصادق والكاذب، فهي مثال آخر على موقفه الواقعي، ما لم يكن بالطبع يهدف إلى بحث نفسي لعمليات التفكير الفعلية".^(٣)

على الرغم من إنتقاد جودل لمنهجية رسل في الوصف إلا أنه عاد ليعترف بأن النظرية بعداً جوهرياً صورياً لاقى لديه القبول، مشيراً إلى أن "بالنسبة لمسألة المعنى المنطقي Logical sense لا يمكنني التوقف عن الشعور بأن المشكلة التي يثيرها الاستنتاج الغامض لـ "فريجه" قد تجنبتها "رسل" في نظريته عن الأوصاف وأن هناك شيء ما خلفها ليس مفهوماً تماماً

(1) Gödel, K.: "Russell's Mathematical logic", p.130.

(2) David Pears & Anthony Kenny: "Mill To Wittgenstein", Op. Cit., p. 253.

(3) Gödel, K.: "Russell's Mathematical logic", p. 130.

حتى الآن. إذ يبدو أن هناك اتجاه صوري واحد فقط يمكن أن يفضل فيه جودل نظرية الأوصاف عند "رسل". بتعريف معنى العبارات التي تحتوي على أوصاف بالأسلوب السابق ذكره، إذ يتجنب "رسل" في نسقه المنطقي أية بديهيات عن أداة التعريف ال، وقابلية تحليلها. بينما أضطر "فريجه"، على العكس، لأفتراض بديهية تحليلية عنها، ولكن فقط بالمعنى الضمني بأنها مشتقة من معنى الحدود الغير محددة. مع ذلك، تظهر هذه الميزة التي تتفوق بها نظرية "رسل" على نظرية "فريجه" فقط طالما يأوول الشخص التعريفات على أنها اختصارات طبوغرافية مجردة، وليست على أنها تقدم أسماء لأشياء تصفها من خلال التعريفات، وهو أحد الملامح العامة بين "فريجه" و"رسل".⁽¹⁾

ثالثاً : المتناقضات المنطقية: The Logical paradoxes and their solution

شكلت المتناقضات^٢ المنطقية Logical paradoxes التي وقفت حجر عثرة في طريق بناء رسل للصرح الرياضي مستنداً على النسق الصوري بكل أدواته ووضوحه واتساقه، منعطفاً رئيسياً في التوجه الفكري المنطقي، إذ على الرغم من أنها زعزعت قبول بعض النظريات المنطقية وأوجدت بها فجوة وخطأ، إلا أنها كانت باعثاً للتطور وظهور نظريات جديدة، استمرت محاولة جودل النقدية أن تحلل نتاج عقلية رسل وتوجهاته الفكرية التي تتجسد بين ثنايا أعماله؛ منطلقاً برويته النقدية إلى أهم أبحاث "رسل" في مجال تحليل مفاهيم المنطق الصوري، أي تلك الأبحاث المتعلقة بالمتناقضات ومحاولة إيجاد حل لها.

أوجز جودل رحلة رسل الفكرية ضد المفارقات بخطوات محددة

(1) Gödel, K. : "Russell's Mathematical logic", p.p 130-131.

(٢) المفارقة المنطقية: Logical paradoxes هي قضية تحتمل الصدق والكذب في آن واحد، أو بعبارة أخرى هي حجة إستنباطية محكمة تبرهن على الحكم ونفيه في آن واحد ويبين تحليل مادي جدلي أن المفارقات هي تعبير عن صعوبات جدلية ومعرفية عميقة ترتبط بمفاهيم عن موضوع ما، والمجال الموضوعي في المنطق الصوري، عن مجموعة (فصل) في المنطق وفي نظرية المجموعات مع توظيف مبدأ التجريد الذي يجعل بالإمكان إدخال موضوعات مجردة جديدة، و منهج لتعريفها في العلم، إذ لا يوجد منهج كلي لإزالة المفارقات . بينما هناك طرق مختلفة ممكنة لحل المفارقات وهي بناء نظرية الأنماط أو تراتيب الأنماط، ، مفارقة مجموعة كل المجموعات ومؤداها إذا جمعنا كل أقلام الرصاص في مجموعة، ولتكن على سبيل المثال (صندوقاً)، فإن هذه المجموعة لا تشتمل على نفسها، لأن الصندوق ليس قلماً. وبهذا يتبادر إلى الذهن تساؤل إذا أردنا تكوين مجموعة من كل المجموعات التي لا تشتمل على نفسها، فهل تشتمل هذه المجموعة على نفسها أم لا؟ وفي كلتا الحالتين يمكن الحكم بالصدق أو بالكذب في آن واحد. وهذا تناقض. (م. روزنتال: الموسوعة الفلسفية العربية، ص ص : ٤٨٦-٤٨٧. وأيضاً رسل: مقدمة للفلسفة الرياضية، مرجع سابق، ص ص ١٤٩-١٥٠، كذلك صلاح عثمان، المنطق متعدد القيم بين درجات الصدق وحدود المعرفة، منشأة المعارف، الإسكندرية، 2002، ص ٢١-٢٤).

- تحليل المتناقضات التي أدت إليها نظرية "كانتور"، وتحريرها من كل التقنيات الرياضية .
- ألقاء الضوء على حقيقة مذهشة بأن الحدوس المنطقية (أي الحدوس المتعلقة بمفاهيم مثل: الصدق Truth، التصور Concept، الكينونة Being، الفصل class، ... إلخ) ذاتية التناقض .Self-contradictory.

- مناقشة بعد ذلك أين وكيف يتم افتراضات قضايا الإدراك العام في المنطق وتصحيحها. وأرجع رسل المتناقضات في نسقه إلى أنه تناقض ينبثق من الإدراك الفطري إنبثاقاً مباشراً لا يحل إلا بالتخلي عن بعض الفروض التي يفترضها الإدراك الفطري

وقد استطاع رسل الوصول إلى استنتاج أن البديهية الخاطئة تكونت من افتراض مسبق بأن لكل دالة قضية يوجد "فصل الأشياء" التي تتفق معها، أو أن كل دالة قضية توجد كـ "كيان منفصل" "as a separate entity"^(١). وهو ما نعني به شيئاً قابلاً للفصل عن الحكم (فكرة أن دالات القضايا مجردة من القضايا المعطاه بشكل أساسي) وأيضاً شيء متميز عن تركيب الرموز المعبرة عن دالة القضية، الأمر إذاً هو ما يمكن أن نطلق عليه المفهوم الذي تعبر عنه^(٢). يكفي وجود هذا التصور بالفعل للمتناقضات في جانبها "المفهومي" في حين أن التصور الذي لا ينطبق على نفسه"، يأخذ مكان فصل المتناقضي paradoxical class لدى رسل^(٣).

حيث أكد رسل أن المتناقضات تلزم عن مقدمات سبق التسليم بها من جميع المناطق، ويصنفها في أنواع ثلاث^(٤):

- المتناقضات الرياضية: وأولها المتناقضة الخاصة بأكبر عدد ترتيبى والتي تعرف باسم؛ متناقضة بورالى فورتى Burali Forti هي كما يلي: ترتيب جميع الأعداد الترتيبية بحسب مقاديرها، فيكون آخرها الذى يسمى ن هو أكبر الأعداد الترتيبية. ولكن جميع الأعداد الترتيبية من ٠ إلى ن هو ن+١، وهو أكبر من ن ومحاولة اقتراح سلسلة الأعداد الترتيبية سيكون لها ذاتها عدد ترتيبى أكبر من أى حد فى السلسلة وهكذا .

- والمتناقضة الخاصة بأكبر عدد أصلى، التي تذهب إلى القول بأن فصل ن من الحدود له

(١) في كتاب "رسل" أصول الرياضيات الجزء الأول : تكلم رسل "عن بعض الصعوبات في نظرية الأعداد النهائية و انماط الأنواع " ،موضحاً إذا أراد الشخص وضع هذه المتناقضات مثل "الكاذب" تحت وجهة النظر تلك، فإن القضايا الكلية (والوجودية) يجب اعتبارها على أنها تحتوي فصل الأشياء التي تدل عليها.

(٢) "دالة القضية" (بدون الشرط "ككيان منفصل") يمكن فهمها على أنها تعني قضية يخص فيها مكون أو عدة مكونات كحجج. قد يعتقد الشخص أن الزوج المتكون من القضية والحجة يمكنه أن يلعب بعد ذلك دور "الدالة القضية ككيان منفصل"، لكن يجب ملاحظة أن هذا الزوج (ككيان واحد) هو مرة أخرى مجموعة مفاهيم أو تصورات وبالتالي لا يحتاج إلى الوجود .

(3) Gödel, K.: "Russell's Mathematical logic", p.p 131-132.

(٤) برتراندرسل: أصول الرياضيات، ج١، ص ص ١٧-١٨.

٢ من الفصول الفرعية. ويمكن إثبات أن هذه القضية تبقى صحيحة حين تكون ن متناهية. وقد أستطاع "كانتور" اثبات أن ٢ أكبر دائماً من ن. ومن ثم لا يمكن وجود عدد أصلى هو أكبر الأعداد الأصلية، أى عدم إمكان وجود أكبر عدد أصلى وعلى الرغم من ذلك كان الرياضيون يفترضون الفصل المشتمل على كل شيء. الذى فيه أكبر عدد من الحدود، مع توضيح أن فصول الأشياء ليست أشياء، وبذلك يفوق عدد فصول الأشياء عدد الأشياء.

- والمتناقضات المنطقية والتي قد ترجع إلى حيل لغوية، ومنها متناقضة الفصول التى ليست أعضاء فى ذاتها .

أدى تطوير كانتور لنظرية المجموعات عام ١٨٧٤ والتى قادت إلى اكتشاف المتناقضات فيها، متناقضة بورالى فورتى، ومتناقضة رسل وريتشار. فى حالة متناقضات رسل، حيث أعتبر رسل المجموعة T لكل المجموعات التى ليست أعضاء فى ذاتها، والتى تبدو أنها تندرج تحت تعريف كانتور للمجموعة فهل تعد T عضواً فى T؟ وبلغة رمزية فهل؛ $T \in T$ ، وعلى افتراض أن المجموعة T عضواً فى ذاتها T؛ ومن ثم فإن من خلال تعريف أن المجموعة T ليست عضواً فى ذاتها $T \notin T$ أى أنها تصبح متناقضة مع الافتراض (١).

فإن $T \notin T \in T$

يتسائل جودل إذ لم يكن هناك فصل كلى عام، أو تصور كلنفترى تحت أية فروض أخرى توجد هذه الكيانات؟ (فيما يتعلق بدالة القضية).

١- محاولة رسل حل المتناقضات :

وضع "رسل" اتجاهان محتملان قد يبحث فيهما الإنسان عن هذا المعيار، وهو ما أطلق عليه نظرية الزجراج "Zig Zag" التى تعتمد على المحتوى والمعنى بشرط وجود نوع من البساطة، ونظرية تحديد الحجم limitation of size، ويطلق عليها المفهومية والماصدقية؛ والتى تجعل وجود الفصل أو التصور يعتمد على المصدق شريطة ألا يكون كبيراً. (٢)

(1) Stephen c. kleene : "Kurt Gödel A biographical memoir" ,p.147.

(2)Gödel, K. : " Russell's Mathematical logic" , p132.

١-نظرية الزجراج المسار المتعرج "The Zigzag Theory"

أطلق رسل على محاولاته فى مخطط أساسى عام ١٩٠٤ أسما مثيرا للأهتمام "Zigzag"(*) كان مصدر نشره الوحيد عبارة عن ورقة تخطيطية لحلول مفارقاته عام ١٩٠٥. وصف رسل للأفكار كان سطحيا وغير مفصلا كان من الممكن أن تكون خارج المخطط.أولا: كانت النظرية حرة تماما من النمط حيث زعم رسل أن حل حرية النمط هو خطوط طويلة من نظرية المسار المتعرج التى تجربنا على الألتزام بتعريف فريجه / رسل للأعداد. ثانيا : وحتى يتم إجتناى المفارقات عن طريق القيود المباشرة فى إستيعاب البديهية .^(١)

تعتمد نظرية الزجراج، على المحتوى أو المعنى(بشرط وجود نوع معين من "البساطة"، وهو الذى يمثل مشكلة من حيث التركيب الصوري الدقيق). فقد تم وضع نسق منطقي مؤخرأ يشترك فى بعض الملامح الأساسية لهذا المخطط، وهو نسق كواين Quine's (**).system^(٢) الذى حاول فيه كواين تصحيح المفاهيم المنطقية والرياضية وأبتكار أنساقاً جديدة

(*) ولنظرية المسار المتعرج شذرات مسبقة، إذ قد دونها رسل فى بعض ملاحظاته فى برنكييا ماتيماتكا أصول الرياضيات وعلى الرغم من أن رسل لم يميز بوضوح بين هذه النظرية وأفكار نظريته للأنماط. من أجل تشكيل فكرة نسق رسل عام ١٩٠٤، لابد للرجوع إلى مخطوطته غير المنشورة وهى رسم مفصل إلى حد ما لنظرية " Zigzag" التى أرسلها إلى وايتهد فى السابع والعشرون من أكتوبر عام ١٩٠٤، مع غلاف رسالة يصفها فيه بأنها إلى حد ما خليط من البلاغة والطموح. وفى عميق أحساسه شعر بأنها تجسد تقدماً متميزاً. كما شعر بأن المتناقضات قد بدت واضحة لدرجة تسمح للمرء أن يتقبلها " وعرض فى ثمانية وعشرون ورقة كيفية حل المتناقضات والمفارقات المنطقية وللمجموعات الكانتورية. Alasdair Urquhart : Russell's Zigzag path to the ramified to theory of types,in "the journal of Bertrand Russell studies, edited Russell, McMaster University, Canada, 1988, p.85

(1) Alasdair Urquhart : Russell's Zigzag path to the ramified to theory of types,p.8٥ (**)كواين W.V.Quine (١٩٠٨):عالم منطق ورياضيات، من المهتمين أهتماما كبيرا بفلسفة المنطق ونظرية المعرفة، أعتقد بأن المنطق الصورى محايداً من الناحية " الوجودية " مادام النسق المنطقى يلزمنا بأن نقبل بعض أنواع بعينها من الكيانات (الأفراد المتعينة كالأشياء الفيزيقية، أو الكيانات المجردة؛ كالفصول والصفات) وقد أقتراح معياراً لتحديد نوع الوجود المفترض سلفاً. وبرهن على أن الوجود لاتحدده أسماء الاعلام التى قد ترد فى عبارة ما، بل يحدده فيها أنماط المتغيرات التى قد نضع مكانها ثوابت. ولقد أوجز كواين هذه القاعدة فى الصياغة القائلة : " لأن يكون الشيء موجوداً معناه أن يكون قيمة لمتغير". كما عارض التفارقة بين العبارات التركيبية والتحليلية وذهب إلى أن نسق الفروض بأكمله يمكن أن يكون موضوعاً لأختبار تجريبى ولهذا وجه النقد لأتباع نظرية تحقيق المعنى لما تزعمه من دلالة حسية للألفاظ. (فواد كامل وآخرون: الموسوعة الفلسفية المختصرة، مرجع سابق، ص ص ٢٦٤-٢٦٥).وقام بحركة ذات أثر بالغ الأهمية فى تصحيح المفاهيم المنطقية والرياضية فى نسق خاص يقوم على التجاور بين المتغيرات وإضافة رموز جديد للسلب – بخلاف علامة السلب فى برنكييا، والأعتماد على البساطة فى تعريفه للدوال، وقيم الصدق التى أستخدم فيها رمز واحد Tبوضعين مختلفين T و ⊥ للتعبير عن صادق وكاذب، ومن خلال نسق كواين يمكن إجراء التحليل على أى صيغة من الصيغ المنطقية. (ماهر عبد القادر محمد : المنطق الرياضى، أورينتال، الإسكندرية، ٢٠١٠ ص١٣٤-١٣٨ .)

(2)Gödel, K. :” Russell's Mathematical logic”, p.132.

مخصصاً كتابه "مناهج المنطق" لبحث موضوعات عدة من أهمها دالات الصدق باعتبارها من المفاهيم الأساسية؛ فتناول دالة السلب P ، ودالة الوصل لإختصار الثوابت المستخدمة فى برنكيبيا مؤكداً أن الوصل بين القضية ونفسها يكافئ القضية ذاتها $p = p$ ، ثم يقدم معالجة لدالة الفصل بصورة أدق من نسق البرنكيبيا مميّزا فيه بين نوعى الفصل "الفصل الأستبعادى exclusive disjunction والفصل غير الاستبعادى non exclusive disjunction الذى يفضل كواين، وبناء على ذلك تصبح القضية P صادقة فقط إذا كانت p كاذبة، ولهذا عرف الدالة على أنها أى "مركب من جمل إخبارية يتوقف صدقها فى كل الحالات على قيم الصدق لأجزائها المكونة لها، ومن ثم تصبح دالة صدق. مشيراً من خلال رؤيته إلى أن السلب والفصل يكفيان وحدهما للتعبير عن الدالات المنطقية. (١)

بحيث نبدأ فى نظرية المسار المتعرج من إقتراح تحديد فصول دالات القضايا عندما تكون بسيطة تماماً، وتفشل فقط فى هذا التحديد عندما تكون معقدة. إلا أن رسل لم يقدم تفاصيل كافية عن المعايير اللازمة للبساطة، ومع ذلك فسر أسم نظريته. إذا كانت $\phi!x$ دالة قضية لا تحدد فصلاً، فإن ماصدق دالة القضية يجب أن يشترق من أى فصل معطاه u ؛

$$(\exists y) \phi!y. \exists u$$

V

$$(\exists y) ((y \in \cdot \phi ! y$$

وتكون الفكرة هنا أن دالات القضايا التى لاتحدد أو تعين فصولاً تشترق من البنية القطرية "diagonal construction" ولهذا ينتج مسار متعرج "Zigzag" كما فى الشكل المعبر عنه بأعلى. (٢).

II_ نظرية تحديد الحجم: The theory of limitation of size

يطلق عليها أيضاً النظرية المفهومية والماصدقية The intentional and extensional theory وتجعل هذه النظرية؛ "وجود" الفصل أو التصور "يعتمد" على ماصدق دالة القضية (بشرط ألا يكون كبيراً جداً*)، أما الملمح الأكثر تمييزاً للنظرية الماصدقية فيتركز

(١) ماهر عبد القادر محمد، المنطق الرياضى، ٢٠١٠، مرجع سابق، ص ص ١٢٥-١٣٢.

(2) Alasdair Urquhart : Russell's Zigzag path to the ramified to theory of types, p.86

(*) وبشكل خاص يمكن تحديد معنى العبارة "ليست كبيرة جداً" (كما وضح "نيومان" J.V. Neumann) لتعنى: ليست مساوية لكون كل الأشياء، أو بطريقة أكثر دقة، يمكن افتراض أن دالة القضية تحدد فئة ما، عندما، فقط عندما، لا توجد علاقة تربط بطريقة واحد - بواحد بين كل عنصر وآخر، وبين عنصر تنطبق عليه دالة القضية والعكس صحيح. مع ذلك، لا يظهر هذا المعيار كأساس للنظرية بل كتابع للبدهييات وبالعكس يمكنه أن يحل محل اثنتان من البدهييات (بدهيية الاستبدال وبدهيية الاختيار). Gödel, K. "Russell's Mathematical logic", p.132.

في عدم وجود فصل كلى Universal class أو (في التأويل المفهومي Intensional interpretation) مفهوم عن "شيء ما" بمعنى غير مقيد.⁽¹⁾ وهو " فصل كل العلاقات المتشابهة مع العلاقات التي لدينا" ويصبح الفصل A متشابه (من حيث أن له نفس عدد الأعضاء) مع الفصل الآخر. إذا كان هناك علاقة واحد - بواحد كما هي في الفصل الأول يكون نطاق العلاقة والفصل الثاني يعبر عن النطاق العكسي للعلاقة، وقد يرى شخصاً ما أنه في البلاد التي لا تعترف بتعدد الزوجات يصبح فصل الأزواج متشابهاً بهذا المعنى لفصل الزوجات. ولكن قد يظن الفرد بأن هاتين الفئتين من الحدود أو الموضوعات يمكن أن يكون لها نفس عدد الأعضاء دون وجود أى علاقة على وجه الإطلاق، فإن هذه الأزواج Pairs Of them بالطريقة التي نعبر عنها بلفظ "زوج من" husband of " كما هو موضح في مثالنا السابق. يعد ذلك مدعاة للخطأ، حينما يفهم مصطلح "علاقة" بمعناه الواسع كما عند رسل حيث حدد. العلاقة في معنى رسل تقريباً أى شيء يمكن التعبير عنه بجملة بها ثغرتين حيث قد تمتلىء بها الأسماء وهذا الإطار لا يكون واضحاً فقط في الربط بين التعبيرات.⁽²⁾

ولكن كيف يتسنى لرسل تعريف مفهوم العلاقة؟ هل على أساس مفهومي أم على أساس ماصدقي؟

غالباً ما يتم تعريف العلاقة على أساس الماصدق، وهذا ما نجده واضحاً عند مناقشة مثل كل من شرودر وبيرس اللذان أعتمدا في تعريفهما للعلاقة على الماصدق، ووفقاً لهذه الرؤية يكون معنى العلاقة هو " زوج أو ثلاثي من الأشياء الجزئية"، التي يتطلب لفظ "يحب" أن يكون هناك فردان يرتبطان بهذه العلاقة، بينما يتطلب لفظ "بين" ثلاثة حدود ترتبط بهذه العلاقة الشيء الذي يكون بين الشيء الثاني والشيء الثالث. إلا أن مثل هذا التعريف الماصدقي يجعل من العلاقات مجرد نوع خاص من الفصول، أى فصول أزواج أو ثلاثيات مما يستحيل معه التمييز بين العلاقات والفصول، كما أنه لا يوضح أهمية منطق العلاقات، ولهذا وجه رسل النظر إلى ضرورة التعريف على أساس مفهومي إلى جانب التعريف الماصدقي كى يستقيم الأمر؛ إذ أشار إلى أن مثل هذا الزوج "فصل الأزواج" لابد أن يكون له معنى بحيث يكون " x ، y مختلفاً عن الزوج " y ، x بشرط ألا يكون x مساوياً y . ويطلق عليه "زوجاً له معنى" أو "زوجاً مرتباً"⁽³⁾

(1) Gödel, K. : " Russell's Mathematical logic", p132.

(2) A.N.Prior : Russell, Bertrand Arthur William, p.244 .

(3) محمد مهران : مقدمة في المنطق الرمزي، مرجع سابق، ص 316-317 .

تتمثل حقيقة موقف رسل تجاه العلاقات، ابتداء من أول مقالة^(*) كتبها عن منطق العلاقات وحتى ظهور كتابه مقدمة للفلسفة الرياضية، والذي يعتمد فيه على الأساس الماصدقي في تعريف العلاقة حيث ذهب إلى أنها "فصل الأزواج" (y, x) Couples التي تكون الدالة $\Psi(X, Y)$ صادقة. بينما ذهب في أصول الرياضيات، إلى تعريف العلاقة على أساس مفهومي من حيث جعلها " هي ما يربط حداً بآخر " اعتماداً على ما يفهم من القضايا، ثم تبنى - صراحة - وجهة النظر الماصدقية بالإضافة إلى المفهومية. (١)

يشير رسل إلى حالة النظر للعلاقة على أساس المفهوم "إن نظرنا إلى العلاقة من جهة المفهوم تؤدي إلى أنه قد يكون للعلاقتين نفس الماصدق، دون أن تكونا منطقتين. ويقال إن علاقتين R, R' متساويتان أو متكافئتان أو أن لهما نفس الماصدق، عندما تكون xRy يلزم عنها وتلزم عن $xR'y$ لجميع قيم x, y . ولا يحتاج، في هذه الحالة، إلى قضية أولية^(**)، كما في حالة الفصول للوصول إلى علاقة محددة عندما يكون الماصدق محدداً، وهي طريقة ما كان يمكن تطبيقها دون الدوران في حلقة مفرغة. (٢)

وبناء على ما سبق، يحدد رسل الأسباب التي جعلته يعرف العلاقة من خلال منظور مفهومي وماصدقي معاً فيما يلي :

يضيف المفهوم على مجموعة الأزواج المرتبة وحدتها ... فمفهوم لفظ ما هو الذي يقدم معنى اللفظ مع استحالة إحصاء ماصدقاته، ويظهر الأمر، واضحاً، في حالة العلاقات؛ إذ يمكن الترتيب في الزمان لفهم لفظ "يسبق" مع استحالة إحصاء جميع الأزواج x, y حينما تحدد العلاقة بأن (X يسبق Y) ضرورة "ترتيب الأزواج" تمنح المقدرة على التمييز بين الزوج x, y عن الزوج y, x والتي لا يمكن تحقيقها إلا على أساس مفهومي، إذ يستحيل تفسير الترتيب بالنظر إلى الفصول والمحمولات. ويعتبر مفهوم الترتيب هو ما يميز الفصول عن العلاقات، بحيث إذا أضيف هذا المفهوم، إلى فكرة الفصل، أمكن القول بأن العلاقات هي معنى ما من المعاني كما

(*) ظهرت مقالة رسل عن منطق العلاقات في مجلة بيان بعنوان منطق العلاقات مع بعض التطبيقات على نظرية المتسلسلات " فيما بين عامي ١٩٠٠-١٩٠١ وقد كتبها باللغة الفرنسية، وترجمها إلى الإنجليزية روبرت تشارلز مارش عام ١٩٥٦ في كتاب "المنطق والمعرفة" (انظر: ماهر عبد القادر فلسفة العلوم، ج ٣، ص ١٨٦ الهامش)

(١) ماهر عبد القادر: فلسفة العلوم : المنطق الرياضي، ص ص ١٨٧-١٨٨ .

(**) القضية الأولية بالنسبة للعلاقات هي أن كل علاقة لها عكس، والتي قد تكون متماثلة ولامتماثلة، إلا أن أهم القضايا الأولية؛ تلك التي تنص على أنه توجد علاقة بين أي حدين لا تقوم بين حدين آخرين. وقد يمكن إثباتها بالنظر في العلاقات من جهة الماصدق، بينما لا يمكن إثباتها عند النظر للعلاقات من جهة المفهوم. برتراند رسل : أصول الرياضيات، مرجع سابق، ص ٦٢.

(٢) برتراند رسل : أصول الرياضيات، ج ١، ص ص ٦١-٦٢ .

يذهب إلى ذلك "ميترز" في تفسير أنواع العلاقات بوصفها أنواعاً من الفصول المرتبة، فتكون العلاقة الثنائية هي "كل فصل ذات زوج مرتب من الموضوعات، وتكون العلاقة الثلاثية؛ هي كل فصل ذات ثلاث مرتب من الموضوعات. وبوجه عام، تكون العلاقة نونية " كل فصل ذات عدد ن مرتب من الموضوعات. (١)

علاقات واحد بواحد تعطى ترابطاً بين فصلين، حدأبعد، بحيث إن كل حد، في أى من الفصلين، له المترابط به في الفصل الآخر، ومثل هذه الترابطات تكون أيسر إدراكاً عندما لا يكون للفصلين عضو مشترك، مثل فصل الأزواج، وفصل الزوجات، ونعرف الحد الذى تسير منه. "المتعلق به". علاقة الترابط ع، والحد الذى تسير إليه "المتعلق"، بحيث إن العلاقة وعكسها لهما " جهتان " متضادتان. وعلى ذلك فجهة العلاقة، التى تسير من X إلى Y مضادة للجهة التى تسير فيها العلاقة المناظرة من Y إلى X، وكون العلاقات ذات جهة حقيقة أساسية وهى ما يجعل إمكانية تولد الترتيب مع علاقات مناسبة. (٢)

إن فصل جميع " المتعلقات به " الممكنة لعلاقة معلومة هو ميدانها. وأن فصل جميع المتعلقات " الممكنة " هو ميدانها العكسى .

يظهر التناقض أن معظم الفصول - فيما يبدو - ليست أعضاء في ذاتها. مثال ذلك أنه ليس صحيحاً أن فصل الناس هو نفسه واحد من الناس، ولكن بعض الفصول تبدو على أنها أعضاء في نفسها، مثال ذلك أن فصل جميع الأشياء الذى يمكن اعتباره قابلاً هو نفسه لأن يعد. ولننظر الآن في فصل جميع الفصول التى ليست أعضاء في نفسها، هل تكون أو لا تكون عضواً في نفسها؟ إنها إذا كانت فإنها لا تكون وإذا لم تكن فإنها تكون. فلنسم الكلمات التى يمكن حملها على نفسها بالكلمات المنطقية الخالصة وتلك التى ليست كذلك بالكلمات اللامنطقية، ولكن هل قولنا "منطق خالص" هو مما يحمل على نفسه؟ إنه إذا كان لم يكن، وإذا لم يكن كان. ومن ثم جاءت نظرية رسل للأنماط لحل المفارقات فى ترتيب الأشياء فى سلم من الأنماط بحيث أن ما قد يكون صحيحاً أو باطلاً عن أشياء فى نمط ما، لايجوز أن يكون كذلك بالنسبة إلى أشياء من نمط آخر إذا كان لكلا منها معنى، وبخاصة إذا ماكانت إحدى الفصول هى ما صدق لمحمول معين كان من الهراء أن نطبق ذلك المحمول على تلك الفصول. (٣)

(١) محمد مهران : مقدمة فى المنطق الرمزي، مرجع سابق، ص ٣١٧-٣١٨ .

(٢) برتراندرسل : مقدمة للفلسفة الرياضية، مرجع سابق، ص ٥٥

(٣) فؤاد كامل وآخرون : الموسوعة الفلسفية المختصرة، مرجع سابق، ص ١٥٨.

يمكن اعتبار البديهيات ، كما طورها "زرميلو" Zermelo وآخرون^(*) ، بعد ذلك كنوع من اتقان هذه الفكرة فيما يتعلق بالفصول. تنص بديهية زرميلو على أن "إذا علم أى فصل من فصول متباعدة، فيما بينها، ليس منها ولا واحد صفر. فهناك - على الأقل - فصل واحد له بالضبط حد واحد مشترك مع كل واحد من الفصول المعلومة". وتكافئ البديهية الافتراض "بأنه إذا كان أى فصل، ف جميع الفصول الفرعية له باستثناء الفصل الصفري، فهناك . على الأقل - عضو واحد من ف ". ويعتبر زرميلو أن البديهية حقيقة لا تقبل المناقشة . كما كان له الفضل فى إظهارها مستقلة تماما عن مسألة صحتها أو بطلانها مما جعل الرياضيين يستخدمونها دون تردد بعد أن أعلنها زرميلو. موضحاً أنها تكافئ القضية القائلة بأن " كل فصل يمكن أن يكون محكم الترتيب، أى يمكن أن يرتب فى متسلسلة لكل فصل فرعى، فيها حد أول باستثناء الفصل الصفري، والبرهان الكامل على هذه القضية صعب ، وبرهانه التى تعرف باسم " بديهية زرميلو" فهناك - على الأقل - علاقة واحدة ع هى علاقة واحد بكثير يشتمل ميدانها العكسى على جميع الفصول الفرعية الموجودة عن طريق الاستقراء المتصاعد الترتيب ، وتشتمل على جميع أعضاء ا وهذه المتوالية تسمى : نظرية زرميلو " (١)

كما أن هناك العديد من النقاط التى فشل فيها البرهان فى " المنطق " إذا لم يكن هناك افتراض عالم من الأشياء اللانهائية (تعريف "التالى" يتطلب أن لا يكون لعدد من نفس التالى، بوجب افتراض تتابع لانهاى)، وأيضاً الحاجة إلى فصول لانهاية أو على الأقل الحاجة إلى فصول ممكنة لانهاية يعد واضحاً فى نقاط عديدة لذلك شعر رسل بأنه مجبراً على التسليم بما يسمى " بديهية اللانهائية " مقيداً نفسه بأشياء عديدة لانهاية . إن البديهية تطمئننا (سواء صدقاً أو كذباً)؛ بأن هناك فصولاً لديها أعداد n . وبذلك تمكننا من أن نؤكد على أن n لاتساوى $n+1$ إننا، بدون البديهية ، متروكون "للامكانية" أن n و $n+1$ ربما يكونان فصلاً فارغاً، وكون الإجراء مريباً - لانقول محرراً - تعد واضحة حتى لغير المتخصصين ، وخاصة بالنسبة لرسل، الذى قال، فى سياق آخر : "هناك مميزات فى طريقة التسليم ولكنها نفس مميزات السرقة على الكدح الشريف". (٢)

أما أعمال "رسل" اللاحقة ، المتعلقة بحل المتناقضات، فلم تسير فى أى من الاتجاهين

(*) يمكن التعامل مع التناقضات المحدودة مثلاً عن طريق نظرية الأنواع البسيطة أو، والذي لا يتضمن أى قيود غير مرغوب فيها إذا تم تطبيقه على المفاهيم فقط وليس على المجموعات. البديهية إذا كانت صادقة فكل فئة يمكن أن يكون محكم الترتيب، لأن المتسلسلة المحكمة الترتيب يجب إما أن يكون لها حدود متناهية فى مجالها ، وإما حدود إنعكاسية. (برتراند رسل: مقدمة للفلسفة الرياضية، ص ١٤٢).

(١) برتراند رسل: مقدمة للفلسفة الرياضية، ص ص ١٣٤-١٣٥ .

(2) Jager , R: "The Development of Bertrand Russell's Philosophy ", P.213

سابقى الذكر اللذين أوضحهما بنفسه، لكنها قامت إلى حد كبير على فكرة أساسية أكثر، ألا وهى "نظرية اللافصل" "no-class theory" والتي، وفقاً لها، لا توجد مطلقاً فصول وتصورات كأشياء حقيقية، والقضايا التي تحتوي على هذه الحدود تكون ذات معنى فقط عن الماصدق الذي يمكن تأويله على أنها طريقة للكلام عن الأشياء الأخرى. وبما أنه صاغ في برنكيبيا مبادئ محددة تم اكتشافها على مدار تطور هذه النظرية كمبادئ منطقية عامة دون ذكر اعتمادها على نظرية اللافصل. فسوف يشير جودل إلى هذه المبادئ. (١)

(2): مبدأ الدائرة المفرغة: The vicious circle principle

مبدأ الدائرة المفرغة*، والذي يمنع نوعاً معيناً من "الدور" "circularity" الذي يعد مسئولاً عن المتناقضات، التي تكمن . بسببه . المغالطة، في الظرف الذي تتحدد فيه المجموعة Totalities، والتي يتضمن وجودها وجود عناصر معينة جديدة بنفس المجموعة، وهي عناصر قابلة للتعريف في صورة المجموعة الكلية الشاملة. أدى ذلك إلى صياغة المبدأ بثلاث عبارات توجز دورهما:

(١) مبدأ يذهب إلى القول بـ "أن لا يمكن لأي مجموعة أن تحتوي على أعضاء قابلة للتعريف فقط في مصطلحات وحدود هذه المجموعة، أو أعضاء تتضمن أو تفترض . بشكل مسبق . هذه المجموعة. ولكي يكون هذا المبدأ قابلاً للتطبيق على المتناقضات المفهومية، مازال هناك مبدأ آخر يمكن افتراضه

(٢) "كل دالة قضية تفترض مسبقاً مجموعة قيمها" وبذلك تفترض . أيضاً مجموعة الأحكام المحتملة لها. على الجانب الآخر فإن تصور أو مفهوم "لا تنطبق على ذاتها" "not applying to itself" سوف يفترض مسبقاً باللا مجموعة (حيث لا تتضمن أية تقديرات كمية أو أسوار**) ولن يمنع مبدأ الدائرة المفرغة تطبيقه على ذاته

(1) Gödel, K. : "Russell's Mathematical logic", p. 133

(*) الدائرة المفرغة أو المصادرة على المطلوب؛ يعد خطأ منطقياً ينشأ من إيراد البرهان أو البيينة بحيث تنطوى المقدمات على النتيجة التي يراد التوصل إليها، كما حاول علماء الرياضيات البرهنة على المصادرة الخامسة (التوازي) برد البرهان بشكل غير مباشر على أساس المصادرة نفسها. (م. روزنتال: الموسوعة الفلسفية، مرجع سابق، ص ٤٨٠) أى أنها مناقشة دائرية

(**) التسوير أو الأسوار نوعان هما رمزين $(E \times)$ و (\times) يعنيان بالترتيب "الشيء \times موجود" و "لكل الأشياء \times ". المجموعة من الأشياء \times تلك التي تشير أو تدل إليها وتسمى إطارها. ويذهب رسل إلى أنها ألفاظ لا تسمى بها أشياء، قط في عالم الأشياء و يستعملها رسل في بناء العبارة الكلامية، إذ تكون بمثابة إطار للقضية أو صورتها أو قالبها ويسمى باللفظ البنائي، وهو يعد بمثابة سور للقضية مثل "كل، بعض، لا، ليس بعض وهى ألفاظ لا معنى لها إذا ارتبطت باسم العلم بينما لها معنى حين ترتبط بالمحمول، وذلك لأن اسم العلم لا

يجرى عليه التبويض ولا يسلب، بينما يكون للمحمول معنى (بعض .. ليسوا أذكاء). زكى نجيب محمود:
المنطق الوضعى، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة، 1951، ص ص ١٦١-١٦٢.

(٣) من الممكن أن يكون مبدأ الدائرة المفرغة لدالات القضايا، الذي يذهب إلى القول بأنه لا يوجد شيء محدد فيدالة قضية يمكن أن يكون حكماً ممكناً لهذه الدالة كنتيجة تالية.^(١)

تختلف الفصول عن الأشياء الخاصة ، ولاتحتاج أن تمثلها رموز لامعرفة. حيث إن الفصول لايمكن أن تعتبر نوعاً من الأفراد على أساس التناقض الخاص بالفصول التي ليست أعضاء في نفسها، ولايمكن أن نأخذ الفصول بالطريقة الماصدقية البحتة على أنها مجرد أكوام أو تجمعات فمن المستحيل فهم كيف يمكن أن يوجد فصل كالفصل الصفري الذي ليس له أعضاء البتة، ولايمكن اعتباره كوما. يحصل أن فصلاً ليس له إلا عضواً واحداً ليس متطابقاً مع ذلك العضو الواحد. وبين الفصول المركبة من مكوناتها. الفصول ودوال القضايا، فكل فصل يعرف بدالة قضية ما تصدق على أعضاء الفصل، وتكون كاذبة على الأشياء الأخرى ، إذا أمكن أن يعرف فصل بدالة قضية واحدة ، أمكن أن يعرف بأية دالة أخرى تكون صادقة كلما كانت الأولى صادقة ، لايمكن أن يتطابق الفصل مع دالة قضية واحدة بالذات إن دالتى " قضيتين " متكافئتين سوريا ، والقضيتان " متكافئتان " عندما يكون كلاهما صادقاً أو كلاهما كاذباً ^(٢)

يلاحظ جودل أن مبدأ الدائرة المفرغة؛ كما قد صيغ؛ ووفقاً للعبارات "قابلة للتعريف فقط في حدود"، "ويتضمن" أو "يفترض مسبقاً"، نجد أمامنا - في الواقع - ثلاثة مبادئ مختلفة، الثاني والثالث أكثر قبولاً من الأول. ويعد الشكل الأول ذا أهمية خاصة، لأنه يجعل التعريف غير المتوقع Impredicative definition مستحيلاً، وبالتالي يحطم اشتقاق الرياضيات من المنطق، وهو بذلك قد تأثر بـ "ديكند" و"فريجه"، ويقدر كبير من الرياضيات الحديثة ذاتها. ومن الواضح أن صورية الرياضيات الكلاسيكية لا تخضع لمبدأ الدائرة المفرغة في صورته الأولى، حيث إن البديهيات تتضمن وجود أعداد حقيقية قابلة للتعريف في هذه الصورية فقط بالاستدلال على كل الأعداد الحقيقية. وبما أن الرياضيات التقليدية يمكن بناؤها على أسس برنكيبيا (بما في ذلك بديهية قابلية الرد)، فإنها لا تخضع لمبدأ الدائرة في شكلها الأول، إذا كان "قابلاً للتعريف" يعني "قابل للتعريف داخل النسق" وليس هناك مناهج خارج النسق للتعريف (أو خارج الأنساق الأخرى للرياضيات التقليدية) معروفة فيما عدا تلك التي تحتوى على مجموعات أكثر شمولاً من تلك التي تحدث في الأنساق.^(٣)

يعتبر جودل^(٤) أن ذلك دليل على خطأ مبدأ الدائرة المفرغة أكثر من أنه دليل على خطأ

(1) Gödel, K.: "Russell's Mathematical logic", p.133.

(٢) برتراند رسل: مقدمة للفلسفة الرياضية، ص ١٩٧.

(3) Gödel, K.: "Russell's Mathematical logic", p.135

(4) Ibid , p.135-136

الرياضيات التقليدية، إذ يمكن للفرد، على خلفية سليمة، إنكار أن الدلالة لمجموعة ما يتضمن بالضرورة الدلالة لكل العناصر الفردية بها، أو بكلمات أكثر إيجازاً؛ أن "كل" تعني وصل منطقي لا نهائي.

أ- ربما تتبع اقتراح "لانجفورد" و"كارناب" لتأويل "كل" على أنها تعني قابلية التحليل Analyticity أو القابلية للبرهنة Demonstrability فعلى الرغم من الصعوبات التي تتعلق بهذه الرؤية، إلا أنه بلا شك بهذا الشكل يخفي الدور في التعريفات غير المتوقعة.

ب- ومع ذلك، حتى إن كانت "كل" تعني وصلاً منطقياً لانهائياً، يبدو أن مبدأ الدائرة المفرغة في شكله الأول، ينطبق فقط إذا كانت الكيانات المتداولة مبنية بواسطة. في هذه الحالة يجب أن يوجد بوضوح تعريف (وصف البنية التركيبية) والذي لا يدل على مجموعة الأعضاء التي ينتمي إليها الشيء المعرف، لأن بناء الشيء يمكن ألا يقوم على مجموعة الأشياء التي ينتمي إليها الشيء المبني نفسه. مع ذلك إذا كان الأمر يتعلق بالتساؤل عن الأشياء التي توجد بشكل مستقل ذاتياً، عن بنية التركيب، فليس هناك شيء في وجود مجموعات تحتوي على أعضاء يمكن وصفها. فقط - بالدلالة على هذه المجموعة.

ويمكن اعتبار وجهة نظر رسل، في كتاباته المبكرة، والتي يذهب فيها إلى أن: "كل الألفاظ يجب أن يكون لها معان من خلال التعبير؛ أي أنها تدل على أشياء أخرى غير ذاتها، وهذه المدلولات هي حدود، وتحتوي القضايا ليست على ألفاظ، وإنما على كينونات أي أن الحدود تدل بواسطة الألفاظ من ناحية، ومن ناحية أخرى فإن تصورات محددة مثل رجل ربما يكون له معنى بشكل آخر..⁽¹⁾

يتضح بذلك الاختلاف الجوهرى بين التمييزات النحوية، والتمييزات المنطقية، فحد القضية هو "أيما ما كان موضوع للفكر، أو يرد في قضية صادقة أو كاذبة، ومن ثم فلكل حدكيان being ليكون بمعنى ما، من ذلك يتبع أن "رجل، دقيقة، عدد، فصل، علاقة، عنقاء وأى شئ يمكن ذكره، فإنه حد بالتأكيد. له كل السمات والخصائص التي تعين الأشياء، وبذلك يكون كل حد "موضوع منطقي" بالإضافة إلى ذلك فإن كل حد ثابت وغير تالف وكل حد متطابق بصورة عددية مع نفسه، مشتق من حدود أخرى.⁽²⁾

حالة العلاقات هذه لن تتناقض حتى مع الشكل الثاني من مبدأ الحلقة المفرغة، حيث لا يمكننا القول أن الشيء الموصوف بالدلالة لمجموعة ما "يتضمن" هذه المجموعة، على الرغم

(1) Klemke, E.D.: "Logic and Ontology In Russell's Philosophy, p.422

(2) Ibid: P.420

من أن الوصف نفسه يتضمنها، ولن نتعارض مع الشكل الثالث. إذا كانت "يفترض مسبقاً" تعني "يفترض مسبقاً الوجود" وليس "قابلية المعرفة Know ability".⁽¹⁾

يبدو إذاً أن مبدأ الدائرة المفرغة ، بالشكل الأول ، يتحقق - فقط - إذا اتخذنا وجهة النظر البنائية^(*) constructivistic أو الأسمية^(**) تجاه موضوعات المنطق والرياضيات، وبصفة خاصة تجاه القضايا والفصول والمفاهيم، أي إذا فهم الشخص عن طريق مفهوم رمزي ما مع قاعدة لترجمة عبارات تحتوي الرمز في هذه العبارات التي لا تحتويه، بحيث يظهر الشيء المنفصل، المشار إليه ، بواسطة الرمز كمجرد خيال. مع ذلك يمكن إدراك الفصول والتصورات كأشياء حقيقية، وتسمي الفصول كـ "كثرة الأشياء" أو كبنيات تتكون من مجموعة الأشياء والتصورات مثل سمات وعلاقات الأشياء الموجودة بشكل مستقل عن التعريفات وعن البنيات التركيبية.⁽²⁾

إذاً قد يعتقد الشخص أن هذا الإدراك للأفكار مستحيل، لأن العبارات ، التي تترجم إليها، يجب أن تحتوي - أيضاً - على أفكار بحيث يصل إلى ارتداد لانتهائي مع ذلك لا يمنع ذلك إمكانية استمرار وجهة النظر السابقة لكل الأفكار الأكثر تجريباً، مثل الأنماط الثانية والأعلى، أو لكل الأفكار فيما عدا الحدود الأولية والتي قد تكون قليلة جداً.

كل ما يمكن للمرء فهمه هو الرمز، وفهم رمز ما هو معرفة ما الذي يمثله. إن كان فهم الاسم يتطلب أن نكون على اتصال مباشر بالجزئ الذي هو اسم له، وأن نعرف أن هذا هو اسم ذلك الجزئ. أما إذا ما حاولنا فهم المحمول؛ حيث يتضمن فهم تلك الكلمة نشاطاً عقلياً مختلفاً

(1) Gödel, K.: "Russell's Mathematical logic", p.136.

(*) المنهج البنائي : constructive (Genetic) method تصور فكرة المنهج التكويني وتطويرها في أعمال د. هلمبرت بروير كمحاولة لحل صعوبات عقلنة الرياضيات والمنطق بصياغتهما استناداً إلى البديهيات (لحل المفارقات في نظرية الأعداد) وحد المنهج البديهي، يعمل على التقليل إلى أدنى حد من القضايا والحدود غير المعرفة مما هو أولى ولا يقبل البرهان. إن مايسعى المنهج البنائي إلى تحقيقه يقوم في الإنشاء المتسلسل للأشياء المتناولة كنظام، والعبارات الخاصة بهذه الأشياء الأولية وتكوين نظريات جديدة عن طريق كيان من القواعد والتعريفات الخاصة بواسطة استدلال خاص يميز النظريات البنائية على مبدأ الاستقراء الرياضى وعلى العلوم الصورية. (م. روزنتال: مرجع سابق، ص ص ٥٠٤-٥٠٥).

(**) الأسميون Nominalists : في تعريفهم للعدد اعتبروا الأعداد مجرد علامات أو ترقيمات لامعنى لها إطلاقاً ولا تزيد على مجرد كونها علامات وحسب، بذلك يتكلمون عن أشياء لها خصائص - هي قطعاً - غير خصائص الأعداد، هي من عالم الأشياء الطبيعية، ترسم على أنحاء مختلفة باختلاف اللغات، وكون العدد دائماً هو هو رغم إختلاف علاماته، كونه في ذاته علاقة ثابتة بالنسبة لما قبله ولما بعده بينما العلامة لا تتضمن تلك العلاقة السيكولوجية التي ميزت بين الأفكار السيكولوجية التي تثار في ذهن الفرد للأشياء المتجمعة في فصول عند رؤيته العلامات العددية وتلك حالات إذا هي ذاتية وتختلف من فرد إلى آخر ومن لحظة إلى أخرى فليست الأعداد ظواهر نفسية وكيفيات سيكولوجية نظراً لما فيها من موضوعية. انظر : محمد ثابت الفندى : فلسفة الرياضة، مرجع سابق، ص ١٤٦.

(2) Gödel, K.: "Russell's Mathematical logic", p.137.

عن الاتصال المباشر، ولهذا فهو أكثر تعقيداً ويطبق نفس الفهم على العلاقات، وعلى كل الأشياء التي ليست جزئيات "هذا مستدير" فكلى نفهم "مستدير" هو أن نفهم ما المقصود بالقول أن شيئاً ما مستدير أى ما الذى نعنيه بقولنا، والمحمول لا يرد فى القضية إلا كمحمول "س مستدير". (١)

وبذلك يصل جودل إلى إبداء وجهة نظره فى ذلك موضحاً أن "الافتراض المسبق لهذه الموضوعات مقبول إلى حد ما مثل الافتراضات المسبقة للأجسام الفيزيائية وهناك الكثير من الأسباب المنطقية فى الاعتقاد بوجودها. وهي بالمعنى نفسه؛ ضرورة للحصول على نسق ملائم للرياضيات كضرورة الأجسام الفيزيائية لوضع نظرية ملائمة لأدراكاتنا الحسية، وفي كلتا الحالتين يعد من المستحيل تأويل القضايا التي نريدها للتأكد من هذه الكيانات كقضايا عن "البيانات"، مثلما يحدث فى الإدراكات الحسية التي تحدث فعلاً. (٢)

كل لفظة كلية فى اللغة، ليست . فى الواقع - إلا عبارات وصفية، ليست بذاتها دليلاً على وجود أفراد لها، مثل "كتاب" تدل على مجموعة صفات أتصورها وقد لا يكون لها مسمى فى الواقع، وكلمة "نهر" تدل على مجموعة صفات أتصورها وقد لا يكون لها مسمى فى الواقع وهكذا. ومن هنا يتضح وجه الشبه، كما يتضح وجه الاختلاف، بين عبارة تتحدث عن شئ حقيقى، وأخرى تتحدث عن شئ خيالى وهمى، فكلتا العبارتان تكون مفهومة للسامع على حد سواء، فلا فرق من حيث الفهم بين أن أقول : "قابلت رجلاً" أو أن أقول "قابلت غولاً" إذا كان للغول صفات معلومة محدودة - لكن تعود العبارتان فتختلفان من حيث أن للأولى أفراداً فى عالم الواقع ، وأنها قد تصدق على أى فرد منهم. على خلاف الثانية التى قد أفهم معناها، إلا أنها ليس لها ، فى عالم الواقع ، أفراد تصدق عليهم. (٣)

يُميّز رسل بين نوعين من الحدود: الأشياء، والتصورات؛ الأشياء تعد موضوعات لأسماء الأعلام، بينما تتعين التصورات من خلال كل الألفاظ الأخرى ، بالإضافة إلى أن رسل يميز، فيما بين التصورات، تلك التصورات التى تحمل ،بواسطة الصفات، من تلك التى تحمل بواسطة الأفعال. فالأولى يدل عليها كمحمولات أو فصل - تصورات، بينما الأخيرة فإنها دائماً ما تكون علاقات. (٤)

(١) برتراند رسل : فلسفة الذرية المنطقية، ترجمة ماهر عبد القادر محمد، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية، 1998، ص ٦٣ .

(2) Gödel, K. op. cit., p.137

(٣) زكى نجيب محمود : موقف من الميتافيزيقا، دار الشروق، بيروت، الطبعة الثانية، 1983، ص ١٦٦ .

(4) Klemke, E.D.: "Logic and Ontology In Russell's Philosophy", p.p. 420-421

فمن الثابت الآن أن العقل يفكر ويستنتج بمقتضى كل أنواع المنطق المختلفة المتعارضة فيما بينها. وعلى هذا، فيجب أن نبحث عن التفسير عن علاقة الحقيقة المنطقية في اتجاه آخر. وتلك العلاقة ليست إلا كون المنطق ، في أية صورة له ، على هيئة نسق استنباطي "تتابع من القضايا يتوقف على مسلّمات وحدود أولية مصرحة ومضمرة " يظل التساؤل فمن أين جاءت تلك المسلّمات والحدود، وما أساسها فهل نفع في حالة من النسبية المنطقية؟ وغيرها من الأسئلة الفلسفية العسيرة التي قد تقبل حلاً باللجوء الى فكرة هنري بوانكاريه في كتاباته "ماعد الأعداد، فان المسلّمات الهندسية وقوانين العلم فروض". هذه الفكرة تجد الآن ظهيراً قويا لها في المنطق المعاصر الذي يحقق تكوينه أو بناء فكرة النسق الافتراضى الاستنباطى (١).

لم يكن اختلاف المسلّمات أمراً معروفاً في المنطق قبل المنطق الرياضى المعاصر لأن معرفتنا بالمنطق أنه ثنائى القيم ولهذا تعودنا التفكير في نطاق الثنائية ولم تكن لتسمح بأن يماط اللثام عن منطق يخالف منطق أرسطو ورسلا ولا تنهى القيم ولكن مع بزوغ المنطق الرياضى المعاصر سمح لنا بالفعل بأن نفكر "بكل ما هو مرفوع"؛ (فكرة التوجيه أو الاحتمال من جهة أخرى هما الأحداثيان Coordinates اللذان يحددان أنواعاً كثيرة من المنطق غير الأرسطو راسلى)؛ بدلا من مبدأ الثالث المرفوع. لم يعد يناسب إذا تعليم المنطق وفقا للطريقة التقليدية مع طبيعة المنطق ذاتها، تلك الطبيعة المنسقة صراحة أو ضمنا فى نسق استنباطى اختبار مسلماته شيء مرهون بالموقف الفلسفى. أصبح عقلية الشخص الافتراض لا تستطيع أن تفكر إلا فى حدود منطق ثلاثى القيم، تكون أيضا عقليات تفكر فى نطاق قيم أكثر. (٢)

يتابع جودل تأكيد رؤيته ، موضحاً أن "رسل" نفسه في الفصل الأخير من كتابه المعنى والصدق Meaning and Truth، قد استنتج _ وإن كان "متريداً" _ ، أن هناك "كليات" لكن من الواضح أنه يريد تحديد هذا التعبير على تصورات الإدراكات الحسية، وهو الأمر الذي لا يساعد عالم المنطق، ويستخدم جودل مصطلح "تصور" بهذا المعنى الموضوعي. أحد الاختلافات الصورية بين الإدراكين للمفاهيم سيكون أن أي تعريفين مختلفين للصورة $\alpha(x) = \varphi$ والتي يمكن افتراض أنهما يحددان مفهومين مختلفين α بالمعنى البنائى. (وبشكل خاص فإن هذه هي حالة التأويل الأسمى للمصطلح "مفهوم" والمقترح فيما سبق، حيث إن هذين التعريفين يعطيان قواعد مختلفة لترجمة القضايا التي تحتوي α). (٣) أما فى الجانب الذى يتعلق بالتصورات، فعلى العكس، ليس هذا هو الوضع بأي حال من الأحوال، حيث إن الشيء نفسه يمكن وصفه بطرق

(١) ماهر عبد القادر محمد : المنطق الرياضى، ٢٠٠٢، ص ٢١٦

(٢) المرجع نفسه: ص ٢١٦-٢١٧ .

(3) Gödel, K. : "Russell's Mathematical logic", p.137.

مختلفة. وقد يكون الأمر أن بديهية الماصدية The axiom of extensionality (*)⁽¹⁾ أو على الأقل شيء قريب منها يسري على التصورات. ⁽¹⁾

ويمكن توضيح هذا الاختلاف بالتعريف التالي للعدد اثنين: "اثنان هو تصور تتدرج تحته كل الأزواج ولا شيء غير ذلك". هناك بالتأكيد أكثر من مفهوم واحد بالمعنى البنائي الذي يلائم هذا الشرط، لكن قد يكون هناك شكل عام واحد أو "طبيعة" عامة واحدة لكل الأزواج.

وبما أن التعريفات غير المتوقعة ومجموعة كل التصورات أو الفصول أو القضايا، غير مسموح بها في المنطق البنائي. فإن ما يتطلبه التعريف غير المتوقع لبناء مفهوم عن طريقة تركيب مجموعة التصورات تنتمي إليها المفهوم المراد تكوينه. بذلك إذا حاول الشخص الوصول لإعادة ترجمة لعبارة تحتوي على رمز للتصور المعرف بشكل غير متوقع، يتضح أن ما نحصل عليه سوف يحتوي - مرة أخرى - على رمز للتصور محل النقاش. على الأقل فإن الأمر هكذا إذا كانت "كل" تعني وصل لانهائي؛ لكن فكرة "كارناب" و"لانجفورد" لن تساعد في هذا الأمر، لأن "قابلية البرهنة"، إذا تم تقديمها بطريقة تتفق مع وجهة النظر البنائية تجاه المفاهيم، فيجب تقسيمها إلى سلسلة من الترتيبات، والتي تمنع الحصول على النتائج المرغوبة⁽²⁾. وكما أوضح "شويستيك" Chwistek من الممكن تحت افتراضات محددة مقبولة داخل المنطق البنائي، اشتقاق تناقض فعلى مع السماح غير المقيد بالتعريفات غير المتوقعة، ولكي نكون أكثر تحديداً لقد أوضح أن نسق الأنماط البسيطة يصبح تناقضياً إذا أضفنا "بديهية المفومية Axiom of Intentionality" التي تذهب إلى القول "بأن التعريفات المختلفة تنتمي إليها مفاهيم مختلفة". مع ذلك، فإنه يمكن افتراض أن هذه البديهية، كما أوضحنا تسري على المفاهيم بالمعنى البنائياً وبنية تراكيب المعنى.⁽³⁾

أول طريقة تفرض نفسها هي البحث عن إبهام في معنى ϵ (علاقة الحد بفصل التصور) ومحاولة التعبير عن التناقض في صيغة فصول التصورات. إن "فصل التصور قد يكون وقد

(*) لا تنتمي خاصيتان مختلفتان لنفس الأشياء تماماً، وهو الجانب المضاد لتطابق اللامتيازات Identitatis indiscernibilium الذي نادى به "ليبنتر" حين افترض كفرص منطقي أن الموضوعين المختلفين لا بد أن يختلفا بالنسبة للمحمولين؛ فلا يوجد شيان مختلفان لهما نفس الخواص بينما ذهب رسل إلي أن المحمولات ليست سوى "دوال حملية" تشمل أيضا العلاقات مع حدود معلومة وخواص متعددة، الأمر الذي جعل افتراض ليبنتر أضيق بكثير مما افترضه رسل إذ قد يكون لشيين نفس المحمول. (برتراندرسل: مقدمة للفلسفة الرياضية، مرجع سابق، ص ٢٠٦).

(1) Gödel, K.: op. cit., p.138

(2) مع ذلك فالخطة مثيرة لأنها توضح مرة أخرى قابلية بناء الأفكار التي يمكن تأكيدها من الأفكار عالية الترتيب.

(3) Gödel, K.: "Russell's Mathematical logic", p.138

لا يكون أحد حدود ماصدقاته". فإن القول "فصل تصور ليس أحد حدود ماصدقاته" يظهر أنه فصل تصور. أما إذا كان أحد حدود ماصدقاته، فهو فصل تصور ليس حداً من حدود ماصدقات، مما ينتج أنه ليس فصل تصور. والتسليم بتلك الفصول من التصورات التي لا يمكن أن يحكم بها على نفسها، جعل من الضرورة أن يشتمل هذا الفصل على فصل تصور ليس حداً لنفسه. (١)

عند الحديث عن التصورات، يتغير الأمر تماماً. بما أنه من المفترض وجود التصورات بشكل موضوعي، لا يبدو أن هناك اعتراضاً. أما على الحديث عنها كلها أو على وصف بعضها للدلالة على الكل (أو على الأقل كل التصورات من نوع معين).

لكن قد يتساءل البعض أليست هذه الرؤية قابلة للتفنيد كذلك بالنسبة للتصورات لأنها تؤدي إلى "السخافة" بأنه ستوجد الخواص ϕ بحيث أن $\phi(a)$ تؤسس في حالة معينة من العلاقات التي تتضمن كل الخواص (بما في ذلك ϕ نفسها والخواص المعرفة في صورة ϕ)، مما يعني أن مبدأ الدائرة المفرغة لا يسري حتى في شكله الثاني على التصورات والقضايا، ليس هناك شك بأن مجموع الخواص كلها (أو كل الخواص في نمط معين) تؤدي إلى مواقف من هذا النوع، ولا يعتقد جودل أنها تحتوي على أي سخافة. (٢)

من الصحيح أن هذه السمات التي تتصف بها دالة القضية ϕ [القضايا $\phi(a)$] سيكون عليها أن تحتوي على نفسها كمكونات لمحتواها [أن تكون ذات معنى]، وفي الواقع من عدة نواحي وبسبب تلك السمات المعرفة في صورة ϕ ، ولكن يظل إستحالة بناء معناها بشكل قاطع لصعوبة تحديد المعنى بوجه عام، (فسرها مثلاً على أنها تقرير للإدراكات الحسية أو أية كيانات أخرى لاتصورية)، من ثم فلا يمكن الاعتراض على من يتخذ وجهة النظر الواقعية. (٣)

(١) برتراندرسل: أصول الرياضيات، ج ١، مرجع سابق، ص ١٧٥-١٧٦.
(٢) النسق الصوري المتفق مع هذه الرؤية سيحتوي على بديهية استبدال الدوال الموصوفة بدلاً من بديهية قابلية الرد، تحتوي على متغيرات من أي نوع، مع بديهيات معينة للمصدق الذي يتطلبه تصور الخاصية التي ستكون مع ذلك أضعف من مفهوم "شويستيك". يجب ملاحظة أن هذه الرؤية لا تفترض بالضرورة وجود تصورات لا يمكن التعبير عنها في النسق، إن كانت مصاحبة لحل التناقضات طوال السطور المشار إليها في
(3) Gödel, K. "Russell's Mathematical logic", p.139

(I) إستحالة التطابق بين الفصل والدالة :

إنّ الفصول لا يمكن أن تكون أشياء من نفس النوع كأعضائها، وأنها لا يمكن أن تكون مجرد أكوام أو تجمعات، وأنها كذلك لا يمكن أن تتطابق مع دوال القضايا ، لأنها أوهام رمزية. ولبحثها كأوهام رمزية ضاعفنا الأمن المنطقي لوضعنا، مادمننا نقادى الحاجة إلى افتراض وجود فصول دون أن نضطر إلى وضع افتراض مقابل، يذهب إلى عدم وجود فصول. الافتراض على نصل أوكام، عندما نمتنع عن إثبات وجود فصول ينبغي أن نفترض أننا نثبت عدم وجودها، فنقول كما قال لابلاس " لست فى حاجة إلى هذا الفرض"، وضع رسل الشروط التى يجب على الرمز تحقيقها إذا وجب أن يخدم الفصل، وبوجه عام ستعطى بعض هذه البدائل قضية صادقة وبعضها الآخر قضية كاذبة، وسيشتمل الفصل المحدد على جميع تلك البدائل التى تعطى قضية صادقة. (١)

لقد أشار أرثرباب Arthur Pap (*) أن من بين الخصائص الرئيسة المميزة لعلم المنطق الذي نادى به رسل: أن هناك تحديداً "لمجال الدلالة range of significance فى عبارة رسل والتي يتم من خلالها تقرير كافة "الصفات الحملية" predicate ، فمثل هذا المدى يتكون في جوهره من فصل من الكيانات a class of entities ، التي تجعل من تلك المحمولات صادقة أو كاذبة لكل أعضاء ذلك الفصل دون غيره، ولقد تمثل السياق الرئيسي، الذي عمل رسل في إطاره، على تناول الاختلاف ما بين المحمولات الكاذبة، والتي لا معنى لها للأشياء في مشكلة حل - أو التصدى - التناقضات المنطقية logical paradoxes المختلفة. من خلال الحكم على المحمول "ليس قادراً على أن يحمل على نفسه"، فهو لا يعد صادقاً ولا كاذباً في الوقت نفسه بالنسبة لتلك الخاصية المتناولة التي يبدو أنها تدل عليه - في واقع الأمر: لا تعد تلك

(١) برتراند رسل: مقدمة للفلسفة الرياضية، ص ١٩٨

(*) آرثر باب Arthur Pap: (١٩٢٢-١٩٥٩) ولد بمدينة زيوريخ (بسويسرا) ، وبعد التحاقه بالمدارس الثانوية بها - محل ميلاده - هاجر إلى الولايات المتحدة الأمريكية، حيث درس على مدى فترة زمنية قصيرة الموسيقى بمدرسة "جويلارد" ثم درس، بعد ذلك، الفلسفة بجامعة كولومبيا الأمريكية. وقد حصل على درجة الدكتوراه في الفلسفة في سن الثالثة والعشرين عاماً، ثم أصبحت أطروحته للدكتوراه وعنوانها "الاستدلال المنطقي في النظرية الفيزيائية (١٩٤٦)، بالإضافة إلى مؤلفاته الأخرى العديدة مثل: عناصر الفلسفة التحليلية (١٩٤٩)، المنطق التحليلي (١٩٥٥)، علم دلالة اللغة والحقيقة الضرورية للأشياء (١٩٥٨)، مشهورة على نطاق واسع لدى الفلاسفة ذوي التوجه التحليلي. كما كان مسهماً معتاداً في الكثير من الدوريات العلمية المحكمة في هذا المجال، وأنهى قبل وفاته بفترة وجيزة كتابه الخامس الذي يدور حول فلسفة العلم. ولقد تضمنت تلك الفترة الزمنية القصيرة للغاية - لسوء الحظ - تعيينه في وظائف التدريس بجامعة كولومبيا وشيكاغو وأريجون وفينا ويال، حيث قام بالتدريس فيها . وتوفي في مدينة نيوهافن بولاية كونيتيكت في ٧ سبتمبر من عام ١٩٥٩، في سن الـ ٣٧ من عمره.

Arthur , Pap , : "*Types and Meaninglessness*", in "*Mind*", Vol. LXIX, No. 273, Published By; Thomas Nelson & Sons, Ltd., Parkside Works, Edinburgh, 1960, p. 41.

الصفة ذات دلالة على أي شيء آخر - وبالتالي ، فإن ذلك قد منعه من الاستدلال بأن هذا التناقض السابق يتمتع بخاصية مميزة له - هي تحديد : عدم القدرة على وصف طبيعة الأشياء ، والتي تعد قادرة/ وغير قادرة في الوقت نفسه على وصف ذاتها. ويصبح التمييز بين الكاذب واللامعنى تم إدراكه بالإدراك العام بمعزل عن أي اعتماد على الدخول في تعقيدات النظريات المنطقية المختلفة. فعبارات مثلنظرية النسبية زرقاء و"العدد ٥ أكبر من العدد ٦"، وما شابه تلك المحمولات لا معنى لها وغير خاطئة، على الرغم من صحتها "من الناحية التركيبية اللغوية، نجد أن رفض عبارة من قبيل (X) زرقاء باعتبارها عبارة خاطئة يعادل نفس التأكيد على أن (X) هذا يتمتع ببعض الألوان الأخرى غير اللون الأزرق الوارد بها، على نفس الشاكلة، نجد أننا ما رفضنا عبارة (X) أكبر من (y)؛ فإن ذلك سوف يشير ضمناً ويؤكد في الوقت نفسه على أن إما أن (X) أو (y) لديهما نفس الوزن تقريباً أو أن (y) يتمتع بحجم أكبر من (X). وما إلى ذلك، وفي إطار المصطلحات المنطقية التي استخدمها رسل؛ نجد أن الإدراك العام يستنتج بأن فصل تلك الكينونات الملونة يُعد بمثابة مجال محدد لدلالة "أزرق"، أو أن فصل الكينونات "لها وزن" مجال دلالة الصفة "ثقيل"، وما إلى ذلك، وباختصار، نجد أن مجال الدلالة التي ترتبط بالمحمولات المستخدمة، سوف يطلق عليها مسمى "النمط" الوثيق الصلة بها.^(١)

يترتب على ذلك، من وجهة نظر جودل، ما يلي :

لا يعد من التناقض الذاتي أن يتطابق الجزء مع الكل (وليس مساوياً فقط). كما في حالة البنية التركيبية بالمعنى المجرد. إذ تحتوي بنية سلسلة الأعداد الصحيحة على نفسها كجزء أساسي، ومن السهل أن توجد أيضاً بنيات تحتوي على العديد من الأجزاء المختلفة بشكل لانهائي، والتي يحتوي كل منها على البنية الكلية كجزء. بالإضافة لذلك، توجد في نطاق بنية التركيب المنطقي، توجد تقريبات معينة لهذا الانعكاس الذاتي للسمات غير المتوقعة، أي القضايا التي تحتوي كأجزاء من معناها، ليس ذاتها، بل قابليتها الصورية للبرهان. والتي تفترض، بدورها، (في حالة صحة البديهيات وقواعد الاستدلال) تتضمن هذه القضية وتكون مساوية لها في العديد من الحالات. كما توجد بلا شك جمل تدل على مجموعة العبارات التي تنتمي إليها بذاتها مثل: "كل جملة تحتوي على الأقل على لفظ واحد يدل على علاقة".^(٢)

(1) Arthur, Pap :Op.cit. , p.p. 41-42.

(2) Gödel, K. : "Russell's Mathematical logic", p.139-140

أن نجمعَ معا في فصل واحد الأفراد، وفصول الأفراد، وفصول فصول الأفراد، لحصلنا على فصل تكون فصوله الفرعية ذاتها أعضاء، والفصل المكون من جميع الأشياء التي يمكن عدّها من أي نوع كانت، يجب أن يكون له عدد أصلي هو أكبر ما يمكن ، وما دامت جميع فصوله الفرعية ستكون أعضاء فيه، يمكن أن يكون هناك من الفصول الفرعية أكثر من الأعضاء. وعندئذ نصل إلى تناقض. محاولة حل تناقض كانتور أوقع رسل في تناقض آخر وهو "الفصل الشامل" والذي يجب أن يشتمل كل شيء يجب أن يشمل نفسه كواحد من أعضائه، " كل شيء " Everything إذن "كل شيء" شيء ما، وعضو في فصل " كل شيء " ليست أعضاء أنفسها، فهذا فصل : إذ هو أحد تلك الفصول التي ليست أعضاء من أنفسها، أي أنه عضو من نفسه. وهكذا كل من الفرضين - أنه عضو وليس عضوا من نفسه - يستلزم تناقضا، وتقوم المغالطة ما يمكن تسميته بالفصول "غير النقية"، أي الفصول التي ليست نقية بالنسبة " للنمط". (1)

وبالطبع فإن هذه الرؤية المتعلقة بالخواص غير المتوقعة تجعل من الضروري البحث عن حل آخر للمتناقضات، بحيث لا تتركز المغالطة في افتراض انعكاسات ذاتية-self-reflexivities معينة للحدود الأولية بل في افتراضات أخرى عن هذه الانعكاسات الذاتية. (2)

ينتضح حقيقة كون الفصول مجرد أوهام منطقية، حينما تكون العبارة، التي نتحدث عن فصول ذات معنى إلا إذا استطاعت أن تترجم ، في صورة ليس فيها ذكر للفصل، فصلا واحدا من الأفراد عضوا أو ليس عضوا من فصل آخر من الأفراد هو كأنك تفترض لغوا ؛ رمزيا؛ أي فصل أفرادها ليست كلها من نفس المرتبة في السلم المنطقي، تستخدم الرموز بطريقة لاتجعلها ترمز لأي شيء، ويبين عدم إمكانية إثبات وجود أعداد وفصول لامتناهية، وهذه الحجة باطلة، وبعض ما فيها من خطأ يرجع إلى أن " الكيان " ليس حدا له أي معنى محدد، وأكثر من ذلك لأنه حتى إذا اخترع له معنى محدد، فسنجد أن الأعداد ليس لها كيان. لأنها حين تطبق على عدد أنعكاسي تعنى أنه إذا علم فصل له n من الحدود، كان هذا الفصل "شبيها" بالفصل الذي نحصل عليه بإضافة حد آخر . ارتقينا سلم في الأنماط إلى الدرجة التي تضمن وجود فصل له n من الحدود، عندئذ يكون هذا الفصل " شبيهاً " بفصل له $1 + n$ من الحدود. (3)

يرى جودل أن رسل استطاع بنظرية الأنماط أن يتصدى للتناقض من جانب التصورات فقط. أما بالنسبة للمفاهيم بالمعنى البنائي فليس هناك شك في أن التناقضات ناتجة عن الحلقة

(1) برتراند رسل: مقدمة للفلسفة الرياضية، ص ١٤٩

(2) Gödel, K. : op.cit , p.140.

(3) برتراند رسل: مقدمة للفلسفة الرياضية ص ص ١٥٠-١٥١ .

المفرغة. ولا يدهشنا أن التناقضات يجب أن يكون لها حلول مختلفة للتأويلات المختلفة للحدود المستخدمة.^(١)

II-الفصول بمعنى الكثرة Pluralities

أو بمعنى المجموعات Totalities الفعلية للحدود فيبدو أنها بنفس الشكل لا تتكون بل توصف فقط بواسطة تعريفاتها وبذلك لا ينطبق مبدأ الدائرة المفرغة في شكله الأول. واعتقد حتى إن وجدت تفسيرات "الفصل" (كنوع معين من البنيات التركيبية)، بحيث لا يتحقق المبدأ بشكله الثاني أيضاً. ولكن بالنسبة لتطور كل الرياضيات المعاصرة قد يمكن افتراض أنه يتحقق بالشكل الثاني، والذي يعتبر، بالنسبة للفصول كمجرد كثرة أو مجموعات، هو في الواقع افتراض مقبول تماماً.

٣- نظرية العلاقات: Theory of Relations

لعبت نظرية العلاقات Theory of Relations دورا بارزا في أى نسق منطقي رياضي، إذ تنشأ أفكار في غاية الأهمية لا على صعيد الرياضيات فحسب، وإنما على صعيد المعرفة بأسرها واستدلال حقيقة معرفتنا، الأمر الذي جعل رسل يؤسس نظرية متكاملة للعلاقات، لاستكمال النسق الاستنباطي للمنطق على أسس رياضية، أخذ رسل بها وعول كثيرا على مسألة العلاقات الخارجية External Relations، في الوقت الذي اقتصر فيه نظرة برادلي على العلاقات الداخلية. واعتبار العلاقات من أهم مباحث المنطق، ذات الدور الجوهرية والمحوري في فلسفة الرياضيات؛ ولهذا حاول إرساء قواعد جديدة لم يألها المنطقة من قبل^(٢).

ولهذا شكلت دراسة العلاقات أهم أجزاء المنطق الحديث، إذ أن الاستنباط بأكمله إنما يقوم على الخواص المنطقية للعلاقات وبالتالي يكون لمفهوم العلاقة أهمية أساسية^(٣).

القول إذا على حد تعبير رسل "إن العلاقة هي تصور يقع في قضية ذات حدود لا تقع كتصور". و يميز رسل بين القضية العلائقية وبين القضية المطابقة لها بناءً على تبادل الحدين فيها، قضية مختلفة. ويمكن التمييز بين مجموعتين مختلفتين من العلاقات^(٤):

- ١- العلاقة الصفرية : وهي التي تربط حدين أو أكثر تتركب منها قضية واحدة .
- ٢- العلاقات المنطقية : هي التي تربط قضية بقضية وتجعل منهما قضية مركبة، مادامت

(1) Gödel, K. : "Russell's Mathematical logic", p.140

(٢) ماهر عبد القادر محمد : فلسفة العلوم، ص ١٨٤-١٨٧.

(٣) محمد مهران : مقدمة في المنطق الرمزي، ص ٣١٥.

(٤) زكي نجيب محمود : المنطق الوضعي، ص ١٥٢.

الأطراف المرتبطة بهذه العلاقات قضايا كاملة. مثال ذلك

إذا فإن

إما أو

..... تسلتزم

إن العلاقات المختلفة تتطلب عدداً مختلفاً من العناصر أو الحدود، فهناك علاقات يتم معناها بذكر عنصرين، وتسمى بالعلاقة الثنائية مثال "X شمالى y"، "X يساوى y"، و"X والد y". وهناك علاقات ثلاثية لا يتم معناها إلا بذكر ثلاثة أطراف مثل علاقة "بين" و"أعطى"، فنقول "X بين y، S"، و"X أعطى y لـ S".

ويمكن تصنيف العلاقات فى نوعين أساسيين هما (1):-

العلاقات التماثلية Symmetrical Relation بأنواعها والعلاقات المتعدية بأنواعها؛ وتدرج ، تحت هذين النوعين من العلاقات أنواع فرعية أخرى ، أعلن عنها رسل فى كتابه "مقدمة لفلسفة الرياضة".

-I- العلاقات التماثلية:-

علاقات مماثلة Analogous Relations فى حالة الفصول الكلية، حيث تكون الفصول لانهاية Infinitely، تتسع هذه العلاقات. والتي لا يمكن التعبير عنها فى لغة بتعبيرات محدودة، وربما يعنى ذلك أنه لا يمكن التعبير عنها بأى لغة، إذ يعتبر بعض الفلاسفة هذه المسألة فى غاية التعقيد والصعوبة، وقد لا يدرك ذلك البعض الآخر. (2) يقال لعلاقة ما أنها تماثلية إذا كانت العلاقة التى تقوم بين A، B، هى ذاتها التى تقوم بين B، A، ويمكن التعبير عنها بأستخدام الرمز R للتعبير عن العلاقة، فتصبح العلاقاتان "A R B" و "B R A" متكافئتين. ومن أمثلة هذه العلاقات علاقة المساواة، وعلاقة الأخفاذا قلنا $A = B$ فإن $B = A$

أصبح فى الإمكان أستبدال الصيغة A R B بالصيغة الأخرى "B R A"

تكون العلاقة تماثلية إذا كانت $E = E$ ويمكن التعبير عنها $R = R$

(1) ماهر عبد القادر محمد: نظريات المنطق الرياضى، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية، ١٩٨٠، ص ١٧٨.
وأيضاً زكى نجيب محمود: المنطق الوضعى، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة، 1951، ص ١٥٩.

(2) A.N.Prior : Russell, Bertrand Arthur William , p.245 .

II- العلاقات اللاتماثلية: Asymmetrical relations:

هى تلك العلاقة التى إذا قامت بين A, B لا تقوم بين A, B أى أن حين تكون R, R' نقيضتين، بمعنى أنه إذا كانت " $A R B$ " استحال أن تصدق معها كذلك الصيغة " $B R' A$ "، ومن أمثلة هذا النوع من العلاقة، علاقة "أكبر من " وأصغر من فإذا كانت $A < B$ لا يمكن القول بأن $B < A$

وكذلك علاقة "والد"، فإذا كان A والد B ، ورمزنا للعلاقة والد بـ R فإن " $A R B$ " لا يمكن القول بأن " $B R A$ "

اللاتماثل، أى خاصية عدم الاتساق مع العكس، خاصة فى غاية الأهمية. حتى تتضح حقيقة تلك السمة يجب عرضها من خلال أمثلة تظهر جوهرها؛ فالعلاقة بعل Husband لاتماثلية، وكذلك العلاقة زوجة، أى إذا كان A بعل B ، فإن B لا يمكن أن يكون بعل A ، وبالمثل فى حالة الزوجة. "أما فى العلاقة "زوج Spouse" فهى علاقة تماثلية فإذا كان A زوج B فإن B زوج A ، أننا أعطينا العلاقة زوج وأردنا أن نشق العلاقة "البعل"، كان البعل هو عين قولنا الزوج الرجل أو زوج المرأة وعلى ذلك فالعلاقة "بعل" يمكن أن تشتق عن علاقة الزوج إما بتحديد الميدان أو النطاق Domain وقصره على الذكور، أو قصر الميدان العكسى على الإناث، ونرى من هذا المثال أننا لو أعطينا علاقة لا تماثلية فمن الممكن، فى بعض الأحيان، وبدون مساعدة من أية علاقة أخرى، أن نفرصها إلى علاقيتين لا تماثليتين، وهى حالات استثنائية ونادرة، فهى حالات يوجد فيها فصلان متباعداً تماماً فيما بينهما مثل A, B بحيث إنه كلما قامت العلاقة بين حدين فأحدهما عضو فى الفصل A ، والآخر عضو فى الفصل B ، كما فى حالة الزوج فأحد الحدين ينتمى إلى فصل الذكور، والحد الآخر ينتمى إلى فصل الإناث. وفى مثل هذه الحالة فالعلاقة التى ميدانها مقصور على الفصل A ، هى علاقة لا تماثلية، كذلك العلاقة التى ميدانها مقصور على B ، ولكن مثل هذه الحالات ليست من الأنواع التى تحدث عندما نبحث فى المتسلسلات التى لها أكثر من حدين؛ المتسلسلة جميع الحدود، ماعدا الحد الأول والحد الأخير تنتمى إلى كل من الميدان والميدان العكسى للعلاقة المولدة.⁽¹⁾

يظهر هنا تأثير الجانب الدلالى لبنية الألفاظ اللغوية وكيف يمكن من خلالها التغيير الجذرى فى طبيعة العلاقات وما يترتب عليها من صدق للقضايا إذ لم يعد المعيار الأوحد هو النظر إلى القضية كوحدة بنائية صورية فقط وإنما أصبح للمعنى والدلالة أثر بالغ الأهمية لا

(1) برتراندرسل: مقدمة للفلسفة الرياضية، ص ص ٤٨-٤٩ .

يمكن إغفاله. ومن هنا اختلفت الرؤية المنطقية للبحث في طبيعة أسس القضايا ومكوناتها بدءاً من اللفظ ودلالته.

يمكن اعتبار صفة اللاتماثل خاصةً أهم بكثير من استلزام التعدد، فالعلاقات اللاتماثلية تستلزم التعدد، ولكن العكس غير صحيح، ويمكننا القول ، بصفة عامة، إننا إذا أردنا أن نستغنى عن القضايا العلاقية ، ونأخذ . بدلاً منها. تلك التي تحمل المحمولات على الموضوعات، فإننا سننحرف عن العلاقات التماثلية. أما تلك التي لا تستلزم التعدد، إذا كانت متعدية، فيمكن اعتبارها بأنها تحكم بمحمولات غير متسقة .ومثل هذه الطريقة التي نضع فيها المحولات بدل العلاقات، طريقة ممكنة صورياً (وإن تكن غير ملائمة في الغالب) ما دامت العلاقات التي نتكلم عنها تماثلية، ولكنها مستحيلة صورياً إذا كانت العلاقة لا تماثلية لأن كلا من العينية واختلاف المحمولات علاقة تماثلية، ويمكن القول إن العلاقات اللاتماثلية لها أهم الخصائص العلاقية للعلاقات. أهم العلاقات بالنسبة للفيلسوف الذي يريد أن يدرس الطبيعة المنطقية القصوى للعلاقات.^(١)

III-العلاقات التكدالات وصفية: Descriptive functions

يرى رسل أن هذه العلاقات ماهى إلا دالات وصفية Descriptive functions " لأنها تصف حداً محدداً Definite term. تنشأ هذه العلاقة بين حد واحد على الأكثر مع حد معين، أى بين حد واحد من أفراد النطاق "طرف البداية ،أو المتعلق به"، وحد أو أكثر من أفراد النطاق العكسى" طرف النهاية أو المتعلق"، ولا يمكن أن يكون لحد آخر فى النطاق نفس هذه العلاقة مع نفس الحدود فى النطاق العكسى.^(٢)

ويمكن القول، بصفة عامة ، إن كل فرع من فروع الرياضيات يعنى بأى فصل من الأشياء التى لها علاقات متبادلة من نوع معين بالذات وبذلك يصبح الفصل، كمايصبح الحد المعين المذكور، متغيراً؛ أما الثوابت الحقيقية فقط هى من أنواع العلاقات وما يدخل فيها. ونعنى فى هذا المقام بنوع العلاقة، فصلا من العلاقات بما سبق ذكره من التطابق الصورى للاستنتاجات التى يمكن إجراؤها على مختلف حدود ذلك الفصل، وبذلك يكون نوع العلاقة على الدوام فصولا يمكن تعريفه بدلالة الثوابت المنطقية، نستطيع إذن أن نعرف نوع العلاقات بأنه فصل من العلاقات يتميز بخاصية يمكن تعريفها بدلالة الثوابت المنطقية وحدها.^(٣)

(١) برتراند رسل: أصول الرياضيات، ج ١، ص ص ٥٠-٥١.

(٢) زكى نجيب محمود : المنطق الوضعى، مرجع سابق، ص ص ٣٣١-٣٣٢ .

(٣) برتراند رسل : مرجع سابق، ص ٣٨

لذلك جعل رسل الحساب التحليلي للعلاقات ركناً أساسياً من أركانه وأوضح مدى اختلافه عن حساب الفصول، والذي يتداخل مع حساب القضايا؛ مؤكداً اختصاص حساب العلاقات بالقضايا الحقيقية، وحقاً إن التشابه الغريب في الرموز بين منطق العلاقات ومنطق الفصول لمدعاة للخداع⁽¹⁾

أكد نسق بديهية "زرميلو" Zermelo's axiom system أن كل فصل يمكن أن يكون محكم الترتيب، لوضع نظرية ما، تنقسم المجموعات إلى "مستويات" Levels بطريقة يكون من الممكن عندها أن تكون مجموعات المستويات الأقل عناصر في مجموعات المستويات الأعلى ($x \in y$ كاذبة دائماً إذا كانت x تنتمي إلى مستوى أعلى من y). وليس هناك سبب للفصول بهذا المعنى أن تستبعد خليط المستويات Mixtures of levels في مجموعة واحدة ومستويات لا محدودة. والآن تحل بديهية الفصول محل بديهية قابلية الرد؛ والتي تذهب إلى القول بأنه يوجد لكل مستوى، لكل دالة قضية $\varphi(x)$ توجد x لهذا المستوى حيث $\varphi(x)$ صادقة، ويبدو أن ذلك يفرضه تصور الفصول كمجموعات.⁽²⁾

ويقدم "رسل" سببين ضد الرؤية الماصدية للفصول Extensional view of classes :
أوضحهما فيما يلي :

(1) وجود الفصل الفارغ Null class ؛ والذي لا يمكن أن يكون مجموعة

(2) الفصل الشامل The unit class ، والذي يتطابق مع أعضائه المفردة.

لكن يبدو لجودل أن هذه الحجج يمكنها أن تثبت أن الفصل الفارغ والفصل الشامل (كشيء متميز عن عنصرها الوحيد) هي مجرد خيالات وأوهام (مقدمة لتبسيط الحساب مثل نقاط اللانهاية في الهندسة)، وليس أن كل الفصول خيالات. بينما أدت التناقضات لدى رسل إلى ميل واضح تجاه بناء المنطق بدون افتراض الوجود الموضوعي Objective existence لهذه الكيانات؛ مثل الفصول والتصورات؛ مما أدى إلى صياغة "نظرية اللافصل"، والتي وفقاً لها تم تقديم الفصول والتصورات كطريقة للكلام. لكن القضايا نفسها (وخاصة تلك التي تتضمن الأسوار) تم تضمينها فيما بعد في هذا المخطط، وهي النتيجة المنطقية لوجهة النظر التي تؤكد أن القضايا الكلية مثل الكيانات الموجودة بموضوعية تنتمي بوضوح إلى نفس طبقة الموضوعات النموذجية مثل الفصول والتصورات وتؤدي إلى نفس النوع من التناقضات، إن تم الاعتراف بها بدون قيود. ولقد تم تنفيذ هذا البرنامج، أما قواعد ترجمة العبارات ، التي تحتوي على فصل

(1) برتراندرسل: مرجع سابق، ص ٤٣-٤٤.

(2) Gödel, K. "Russell's Mathematical logic", p.p. 140-141.

الأسماء أو المصطلح "فصل" إلى عبارات لا تحتويها، فقد تم ذكرها بشكل صريح، وقاعدة النظرية، أي نطاق العبارات ، التي يجب الترجمة إليها يصبح واضحاً، بحيث يمكن توزيع الفصول (داخل نسق برنكيبييا)، ولكن - فقط - إذا تم افتراض وجود التصور عند بناء فصل (١).

وعندما يصل الأمر إلى التصورات وتأويل العبارات التي تحتويها أو بعض المترادفات الأخرى للمصطلح، كما أن حالة العلاقات واضحة بقدر الإمكان. قبل كل شيء، يجب اعتبار بعضها (المحمولات الأولية والعلاقات مثل "أحمر" أو "أكثر برودة") أشياء حقيقية؛ أما الباقي فيبدو كشيء مبني (كشيء لا ينتمي إلى "موجودات Inventory" العالم)؛ أو النطاق الأساسي للقضايا، الذي يتم من خلاله تأويل كل شيء؛ أو منهج التأويل، ليس واضحاً كما في حالة الفصول (٢).

وهذا المخطط الكلي لنظرية اللافصل ذات أهمية كبيرة كأحد الأمثلة القليلة، المنفذة بالتفصيل، على اتجاه حذف الفروض المسبقة الخاصة بوجود الموضوعات خارج "البيانات" واستبدالها ببناءات على أسس هذه البيانات. لكن كانت النتيجة، في هذه الحالة، سلبية تماماً، أي أن الفصول والتصورات المقدمة، بهذا الشكل، ليس لها كل الخواص المطلوبة للاستخدام في الرياضيات، ما لم يتم تقديم بديهيات خاصة عن البيانات (مثل بديهية قابلية الرد axiom of reducibility^(*))، والتي تعني - باختصار - وجود نوع من الأشياء التي يتم بناؤها في البيانات، أو أن يجعل الخيال بأن الفرد يمكنه صياغة قضايا ذات طول لا نهائي (وغير رقمية)، يعمل مع دوال الصدق اللانهائية للعديد من الحجج، بغض النظر عن إمكانية بنائها. (٣)

لكن ماهي دالة الصدق اللانهائية إن لم تكن نوعاً خاصاً من الماصدق اللانهائي (أو البنية)، ونوعاً أكثر تعقيداً من الفصل، ذا معنى شرطى Hypothetical meaning بالإضافة لذلك، وهو ما يمكن فهمه فقط بواسطة عقل لا محدود Infinite mind ؟ كل هذا ما هو إلا

(1) Gödel, K. : op.cit., p. 141.

(2) Ibid: p.p.141-142.

(*) تعريف بديهية قابلية الرد: Axiom of Reductibility: تنص بديهية الرد على أن الخاصية، التي ليست خاصة من الخواص المحمولة المسندة ، تكون مرادفة - دائماً - من الوجهة الصورية لخاصية ما من الخواص المسندة. أي تكون الخاصيتان مترادفتين من الوجهة الصورية إذا كانت الأشياء التي تتصف بإحدهما هي نفسها الأشياء التي تتصف بالأخرى .. وعلى الرغم من أنها بديهية واضحة بذاتها، إلا أن الوضوح بالذات لا يعدو مطلقاً كونه جزءاً من السبب الذي من أجله سلم ببديهية من البديهيات، أي أنه سبب إستقرائي، ولا يعني وضوحها أنها لا تقبل الشك ولهذا فإن استخدامها قد يؤدي إلى الخطأ. برتراندرسل : فلسفتي كيف تطورت، ترجمة عبد الرشيد الصادق، مراجعة زكى نجيب محمود، مكتبة الأنجلو المصرية، الطبعة الأولى، ١٩٦٠، صص ١٤٦-١٤٨

(3) Gödel, K. : op.cit., p.142

تصحيح للرؤية، التي دافع عنها جودل؛ بأن المنطق والرياضيات (مثل الفيزياء) يقومان على بديهيات ذات محتوى حقيقي لا يمكن "تفنيده".^(١)

يؤكد جودل على أن النسق المنطقي الذي نصل إليه من هذه المبادئ الثلاثة يتجسد في نظرية الترتيبات في شكلها الصوري.

ثالثاً: نظرية ترتيب الأنماط: The theory of orders

يؤكد جودل على أن من الناحية الماصدقية؛ التي يترتب فيها تال أى دالة قضية باعتبارها حجة دالة ما بنمط من الخصائص والسمات، وتعين ماصدق ما، وبلا شك أن هذه الأشياء غير قابلة للاعتراض حتى من وجهة النظر البنائية، بشرط أن تكون الأسوار قاصرة فقط على ترتيبات معينة. ويتم تجنب التناقضات عن طريق نظرية الأنماط^(*)، والتي تأتي مصاحبة لنظرية ترتيب^(**) الأنماط لكنها مستقلة تماماً عنها وليس لها علاقة بمبدأ الحلقة المفرغة.^(٢)

ففي الطبعة الأولى من برنكيبييا، وفقاً لدالة القضية التي إما أن تحتوي على تقديرات كمية إلى دالات القضايا للترتيب n أو تكون ذات معنى بتقريرها دالات القضايا للترتيب n ، بحيث تك

(1) Gödel, K. : op.cit., p.142.

(*) نظرية الأنماط theory of types : نشأت عن اكتشاف رسل لهذا لتناقض "أن معظم الفصول – فيما يبدو – ليست أعضاء في ذاتها" مثال ذلك أنه ليس صحيحاً أن فصل الناس هو نفسه واحد من الناس، ولكن بعض الفصول تبدو على أنها أعضاء في نفسها، مثال ذلك أن فصل جميع الأشياء الذي يمكن عده يبدو قابلاً هو نفسه لأن يعد. وفصل جميع الفصول التي ليست أعضاء في نفسها، هل تكون أو لا تكون عضواً في نفسها؟ إنها إذا كانت فإنها لا تكون وإذا لم تكن فإنها تكون. فلنُسمِّ الكلمات التي يمكن حملها على نفسها بالكلمات المنطقية الخالصة وتلك التي ليست كذلك بالكلمات اللامنتطقية، ولكن هل القول "منطق خالص" هو مما يحمل على نفسه؟ إنه إذا كان لم يكن، وإذا لم يكن كان. لا بد إذا من ترتيب الأشياء في سلم من الأنماط بحيث أن ما قد يكون صحيحاً أو باطلاً عن أشياء في نمط ما، لا يجوز أن يكون كذلك بالنسبة إلى أشياء من نمط آخر إذا كان لكلاً منهما معنى، وبخاصة إذا ما كان إحد الفصول هو ما صدق لمحمول معين كان من العبث تطبيق ذلك المحمول على ذلك الفصل. (فؤاد كامل وآخرون : الموسوعة الفلسفية المختصرة ، مرجع سابق ، ص ١٥٨). وبذلك يقرر ان لكل متغير وثابت يتعلقان بمقولة محددة نمط له تدرج هرمي من خواص الأشياء، وخواص تلك الخواص، وخواص لخواص الخواص.... ألخ وترى هذه النظرية ان ليس ثمة خاصية او قضية أو نظرية يمكن ان تنطبق على ذاتها. (محمد محمد قاسم، نظريات المنطق الرمزي، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية، ١٩٩١، ص ٣٩٨).

(**) نظرية تراتيب الأنماط : Theory Hierarchy of Types منهج لبناء المنطق الصوري (الرياضي) بالترقية بين الموضوعات ذات الأنماط المختلفة؛ ويهدف إلى استبعاد المفارقات أو التناقضات من المنطق ونظرية الأعداد. وكان أرنست شرودر أول من وضع نظرية الأنماط. وطبقها على الفئات بينما بنى رسل نسقاً تفصيلياً من نظرية الأنماط، وطبقه على حساب الاحتمالات. وهو يقوم على أساس التفرقة بين الأفراد (نمط ١) والصفات (نمط ٢) وصفات الصفات (نمط ٣)، كما أدخل تقسيم الأنماط إلى رتب. م. روزنتال: مرجع سابق، ص ٥٣٦

(2) Gödel, K. op. cit., pp.134-135

على الأقل الترتيب $n+1$ ، ويصبح مجال دلالة دالة القضية تماما كمجال السور، يجب تحديدهما دائماً في ترتيب محدد. (١)

يمكن التمييز - عند رسل - بين نظريتين للأنماط، نظرية بسيطة من الأنماط، ونظرية ترتيب الأنماط، وهذه الأخيرة طورها رسل مؤخرًا، وأدركها رامزي - تلميذ رسل - على أنها تعقيدات غير دورية لنظرية الأنماط الأولى. وتتكون نظرية الأنماط عند رسل من تصنيفات التعبيرات التي تعبر عن أنماط مختلفة .

والنمط (0) مثلاً ينتمي إلى أسماء الأشياء مثل : (a,b..)

والنمط (١) ينتمي إلى سمات هذه الأشياء مثل [F(a), g(a)...

والنمط (٢) ينتمي إلى سمات هذه السمات مثل [h(f),G(f)...

والنمط (٣) ينتمي إلى سمات من سمات من سمات .. وهكذا.

ولقد قدم رسل النظرية التشعبية للأنماط ، التي لم تلقَ قبولا لدى المنطقيين، لأنه قسم خاصة كل نوع إلى "أوامر" ، وهذا التقسيم لا يؤسس على نوع الأشياء التي تقود إليها الخاصية، ولكن يؤسس على شكل التعريف الذي يقدمه (٢) .

إن رسل لديه تفصيل فلسفي للأوصاف ، وشعر بأن في تعريفه للأنماط سياقاً على أساس نظرية الأوصاف، فإنه كان يقوم بشرح الغامض بواسطة الواضح. ولكن هذا الشعور جاء نتيجة لفشله في التمييز بين دالات القضايا باعتبارها محمولات، وبين دالات القضايا باعتبارها صفات من ناحية أخرى وبفشله في هذا كان بإمكانه الاعتقاد بسهولة في أن فكرة الصفة تكون أوضح من النوع فهذا يكون في حالة المحمول، والصفة تكون أقل وضوحاً (٣) .

(1) Gödel, K. : op.cit., pp.133-134.

(2) Carnap, R.: "The Logicist Foundations of Mathematics, "In Essays On Bertrand Russell", Edited by E.D.Klemke, University of Illinois Press, London, 1970, p.p.346-347.

(3) W.V. Quine: "Russell's Theory of Types," In Essays On Bertrand Russell", Edited by E.D.Klemke, University of Illinois Press, London, 1970, P. 285.

ترتيب القضايا وترتيب دالات الأفراد تعد كلاهما أساس الترتيب للأفراد، ودالات الأفراد، دالات دالات الأفراد، وتسمى دالة الأفراد بالنمط ذا الترتيب الأول، ودالة دالات الأفراد بالنمط الثاني type ٢، ومن هنا يبدأ بناء ترتيب القضايا كمايلي (١):

قضايا الترتيب ٠ الابتدائية لاتحتوى على متغيرات

قضايا الترتيب ١ تحتوى على متغيرات للأفراد

قضايا الترتيب ٢ تحتوى على متغيرات قيمها دالات النمط الأول

قضايا الترتيب n. تحتوى على المتغيرات التى تكون قيمها دالات النمط ١-n

من خلال هذا الترتيب نستنتج ترتيبا آخر للدالات .

ميز رامزى تميزا جوهريا بين الترتيب والنمط حيث أوضح أن نمط دالة ما هى خصائص حقيقية لها تعتمد على "دالات المحمول" أو "المحمولات المسندة"، إذ لا يستخدم رامزى نفس مصطلح رسل فى البرنكيبيا فى طبعته الأولى والثانية؛ بينما يستخدم رسل فى أعماله اللاحقة الحدود الأولية ويستخدم رامزى مصطلح المحمولات المسندة للأفراد هو فى أى دالة صدق للحجة سواء أكانت أعدادا نهائية أو لانهاية، فإنها تعد دالات ذرية للأفراد أو للقضايا وتعرف المدى المحدد لدالات الأفراد الذى هو أوسع من أى مدى ظهر فى برنكيبيا. ويعتمد جوهريا على مصطلح دالة الصدق للعدد اللانهائى للحجة. إذا كان هناك فقط عدد محدود من الحجج فإن دالات المسندة ستكون. دالات ابتدائية بسيطة للبرنكيبيا. وبالنسبة للعدد اللانهائى. فإنه لا يتم تحديد مجال الدالات التى يمكن أن يتم بنائها بالطريقة ذاتها وإنما يتم تحديدها من خلال وصف معناها. ولتصبح دالات صدق - ليس بمعنى ظهورها وإنما فى دلالتها - لقضايا ودالات ذرية. (٢)

ويصبح، أنه إذا علم أى فصل غير إستقرائى، فمن الممكن اختيار متوالية من حدوده، وهكذا نستطيع تكوين منظومات من الفصول الفرعية المتناهية من ١ : أولافصل ليس له حدود، ثم فصول لها حدان، متوالية من منظومات من الفصول الفرعية كل منظومة منها تشتمل على كل تلك التى لها عدد معين متناه معلوم من الحدود، عدد انعكاسى أنه بافتراض بديهية نظرية زرميلو، وهى القائلة بأن البديهية إذا كانت صادقة فكل فصل يمكن أن يكون محكم الترتيب، لأن

(1)F.P Ramsey: "Predicative Functions and the Axiom of Reducibility", In Essays On Bertrand Russell", Edited by E.D.Klemke,University of Illinois Press, London,1970, p.366.

(2)F.P Ramsey: "Predicative Functions and the Axiom of Reducibility", p.360

المتسلسلة المحكمة الترتيب يجب إما أن يكون لها حدود متناهية في مجالها، وإما حدود انعكاسية.^(١)

بالنظر في الجمل والعبارات القائلة بأن إحد الفصول المحددة تعد في جوهرها أنماطاً للأشياء؛ فإن هذا التعريف المباشر للنمط الوارد في كتاب رسل "المبادئ الرياضية" يؤدي بنا بالضرورة إلى الحصول على نتائج غير مقبولة على الإطلاق. ولذلك؛ فإننا سنتناول فيما يلي كيف يمكننا أن نثبت من خلال استخدام نظرية رسل للنمط، أن عبارة "سقراط عدد أولي"، "لا معنى لها على الإطلاق. فإذا ما افترضنا أن نوعية المناقشات، التي تدور حول طبيعة الصفة الرياضية للشيء المتناول تعد أولية؛ بحيث تدل على فصل كافة الأعداد الطبيعية؛ ففي هذه الحالة يمكن كتابة القضيتين المنطقيتين التاليتين وهما:

(١) إن تلك العبارة تكون ذات معنى فقط إذا ما كان سقراط عدداً طبيعياً، ومن أجل الوصول إلى تلك النتيجة المرغوب فيها بأن هذه العبارة السابقة لا معنى لها؛ فإنه يلزمنا صياغة المسلمة التالية والتي تشير إلى أن:

(٢) "سقراط ليس عدداً طبيعياً" لكننا نستطيع بالكاد إثبات ذلك الاستنتاج الذي له معنى محدد والذي يشير إلى أن تلك الجملة السابقة لا معنى لها من خلال المقدمة؛ التي لا معنى لها؛ وبالتالي فإن ذلك يعد في جوهره دليلاً ملموساً على عدم كون تلك الجملة المستخدمة لا معنى لها؛ بما يؤدي بنا إلى الافتراض مسبقاً بأن تلك العبارة رقم (٢) لا معنى لها.^(٢)

هكذا صرح رسل في مقدمة الطبعة الثانية من المؤلف ذاته إمكانية ظهورها "بمعنى محدود" "Limited sense"، ويمكن أن تظهر أيضاً الدالات ذات الترتيب الأعلى من المحمول نفسه (بذلك نضيف أيضاً الدوال المعرفة بحدود المحمول مثل، ϵ k، ϵ k، ϵ k) كحجج لمحمولات الدوال؛ وفي الملحق B تحدث هذه الأشياء بشكل ثابت ومتسق. ويعني ذلك أن مبدأ الدائرة المفرغة لدالات القضايا يتم إسقاطه فعلياً. إذ يرتبط هذا التغيير بالبدئية الجديدة التي تنص على أن الدوال يمكن أن تحدث في القضايا فقط "من خلال تحديد قيمها" أي الأبعاد الماصدية، والنتيجة المترتبة على ذلك؛ أن أي دالة قضية قد تتخذ كحجة أي دالة من النوع الملائم، يكون ماصدقها محدداً (بغض النظر عن ترتيب الأسوار quantifiers المستخدم في تعريف هذا الماصدق).^(٣)

(١) برتراند رسل: مقدمة للفلسفة الرياضية، ص ١٤٠ - ١٤٢

(2) Arthur, Pap, : "Types and Meaninglessness", p.43

(3) Gödel, K.: "Russell's Mathematical logic", p. 34.

فى إطار مفهوم دالة القضية بهذا المعنى تجانست الرياضيات بالمنطق، فمن خلال معرفة قيمة الدالة تحددت - بالتبعية- قيمة القضية ككل فى الرياضيات ص= $(2 + 4)$ ، بتحديد قيمة أ ب ٥ يمكن معرفة قيمة القضية ككل كالتالى (ص) = $(2 + 20) = 22$. والتي قد تختلف باختلاف القيمة التى تم تحديدها للقيمة المجهولة داخل صيغة الدالة، وكذلك الأمر فى دالات القضايا المنطقية للقضية الكلية، والتي هى فى الحقيقة شرطية؛ "كل إنسان فان" (إذا كان إنسان فان X فان) ،بتحديد قيمة X تحولت من دالة قضية إلى قضية تحتوى على مقدم وتال يمكن الحكم عليها. (١)

مايمكن الحصول عليه على أساس الموقف البنائي هي نظرية الترتيبات، و فقط الآنلا تبدو (وهذه هي النقطة القوية للنظرية) كقضايا مرتبة لتجنب التناقضات، لكن كنتائج لا يمكن تجنبها للفرض بأن الفصول والتصورات والقضايا الكمية غير موجودة كأشياء حقيقية. وليس الأمر كما لو أن الكون مقسم إلى ترتيبات وبالتالي يكون من الممنوع الحديث عن كل الترتيبات؛ لكن على النقيض تماما، فمن الممكن الحديث عن كل الأشياء الموجودة، فقط الفصول والتصورات ليست من بينها، وإذا تم تقديمها كطريقة كلام، يتضح أن هذا المصدق للرمزية يثير إمكانية تقديمها بطريقة أكثر شمولاً، .. إلخ. ولتنفيذ هذا المخطط، يجب أن نفترض مسبقاً علم الحساب (أو شيء مساوي له) والذي يثبت فقط أنه حتى هذا المنطق الصارم لا يمكن بناؤه على لاشيء. ففي الطبعة الأولى من برنكييا، حيث أثير السؤال حول بنية المنطق والرياضيات، ثم التخلي عن الموقف البنائي، في الأغلب الأعم، حيث أن قاعدة قابلية رد الأنماط أو النمط الأعلى من النمط الأول، مع بديهية اللانهاية تجعل من الضروري وجود محمولات أولية للأنماط العليا. وما يبقى من الموقف البنائي فقط: (١) تقديم الفصول كطريقة كلام، (٢) تعريف السلب ~، الفصل ٧، ... إلخ، على أنها تنطبق على القضايا التي تحتوي على أسوار (والتي ثبت كثرتها في برهان المطابقة بعلم الحساب)؛ (٣) البناء خطوة بخطوة لدوال الترتيبات الأعلى. ومن (١) الذي يعتبر زائداً عن الحاجة نتيجة لقاعدة قابلية الرد؛ و (٤) تأويل التعريفات على أنها اختصارات طبوغرافية مما يجعل كل رمز يقدمه التعريف رمزاً ناقصاً، (أي رمز لا يقصد الشيء الذي يصفه التعريف). لكن البند الأخير هو وهم إلى حد كبير، لأنه توجد دائماً أشياء حقيقية فى صورة محمولات أولية، أو تراكيب منها، تتفق مع كل رمز محدد. (٢)

(١) ماهر عبد القادر محمد : نظريات المنطق الرياضى، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية، ٢٠١٥، ص٦٦-

(2) Gödel, K. :” op.cit , p.143 .

يشير رسل إلى أن النمط هو ذلك الفصل الذي يمكن، في إطاره، التأكيد على أن شيئاً ما يعد عضواً منضوباً في إطاره، وصحيحاً شريطة أن يكون ذا دلالة ومعنى. يقدم آرثر تعريفاً آخر مباشراً لمفهوم رسل للنمط، يعد مشابهاً، إلى حد كبير، لتعريف رسل له على النحو التالي: النمط هو ذلك الفصل المكون من كافة الكيانات التي تنتمي إلى نفس النمط، والتي يمكن النظر إليها باعتبارها شيئاً ذا كينونة محددة. ويعد ذلك المفهوم المحدد، لمعنى الشيء ودلالته متضمناً بالضرورة في إطار هذا التعريف السابق كذلك؛ لأن (x) و (y) ينتميان إلى نفس النمط - من منظور رسل - إذا ما كان بالإمكان استبدال (x) بـ (y). والعكس صحيح في إطار أية قضية ذات معنى، بدون أن تؤدي إلى اعتبارها مجرد هراء لا طائل من ورائه.⁽¹⁾

كذلك أدرك جودل أن نظرية "رسل" عن الأوصاف تنتمي أيضاً إلى الترتيب البنائي للأفكار. في مقدمة الطبعة الثانية من برنكيبييا، حيث تم استئناف الموقف البنائي مرة أخرى. وتم إسقاط قاعدة قابلية الرد، والتصريح بأن كل المحمولات الأولية تنتمي إلى أنواع أقل وأن الغرض الوحيد لمتغيرات (وايضا الثوابت) ترتيبات النمط الأعلى، هو أن تجعل من الممكن تقرير دوال الصدق الأكثر تعقيداً للقضايا الذرية، وهي طريقة أخرى لقول أن الأنماط العليا والترتيبات هي فقط طريقة للكلام. وبخبرنا هذا التعبير، في الوقت نفسه، عن نوع القضايا التي يتكون منها أساس النظرية، وهي دوال الصدق للقضايا الذرية.⁽²⁾

مع ذلك، يحدث ذلك بدون صعوبة فقط، إذا كان عدد الأفراد والمحمولات الأولية عدداً محدوداً. في الحالة المضادة عدد اللانهائية، (ذات الأهمية الأساسية لغرض اشتقاق الرياضيات) أخذ "رامزي" مساراً أن يضع في الاعتبار عدم قدرتنا على صياغة قضايا ذات طول لانهاية كـ "صدفة بحتة": كي يتجاهلها علم المنطق. ويحل ذلك - بالطبع. (أو على الأقل يخترق الصعوبات؛ لكن يجب ملاحظة أنه إذا تغاضينا عن الاختلاف بين المحدود واللامحدود أو اللانهائي واللانهاية في هذا الاتجاه، فهناك تأويلاً أبسط وأعمق لنظرية المجموعات (ضمن الرياضيات). في حالة العدد النهائي للأفراد، فإن فرض "رسل" بأن القضايا عن الفصول يمكن تأويلها كقضايا عن عناصرها، صحيحة حرفياً، حيث "x ∈ m" مساوية لـ "x=a1, vx=a2v ... vx=ak" حيث a1 هي عناصر m و"يوجد فصل "مثل" ... مساوية لـ "يوجد أفراد x1, x2, ..., xn مثل .."، بشرط أن تكون n عدد الأفراد في العالم. وبشرط أن نتجاهل، في الوقت الحالي، الفصل الفارغ والذي يتطلب بنداً إضافياً لتناوله. وبالطبع، بتكرار هذا الإجراء يمكن الحصول على فصول الفصول .. إلخ، بحيث يمثل النسق المنطقي الذي حصلنا عليه، نظرية الأنماط البسيطة فيما

(1) Arthur Pap: "Types and Meaninglessness", p.42.

(2) Gödel, K. : "Russell's Mathematical logic", p.p.143-144

عدا الظرف الذي يكون فيه خلط الأنماط ممكناً". إذا تبدو النظرية البديهية، تخميناً، لهذا المخطط في حالة العديد من الأفراد أو التكرار اللانهائي لعملية صياغة المجموعات.⁽¹⁾

وبالطبع ، فإن وجهة نظر "رامزي" لا يمكن أن تكون بنائية، ما لم نكن نقصد بها بناءات العقل اللامحدود. وفي الطبعة الثانية من برنكيبيا اتخذ "رسل" مساراً أقل ميتافيزيائية بتحديد موقفه داخل دوال الصدق التي يمكن بناؤها. بهذا الشكل نصل مرة أخرى إلى نظرية الترتيبات والتي، مع ذلك، تبدو الآن في ضوء جديد، كمنهج لبناء المزيد والمزيد من دوال الصدق المركب للقضايا الذرية. لكن يبدو أن هذا الإجراء يفترض مسبقاً علم الحساب بشكل أو بآخر؛ فبالنسبة للتساؤل حول كيفية بناء الرياضيات على هذا الأساس، (بدون أية افتراضات عن البيانات – أي المحمولات الأولية والأفراد – فيما عدا بديهية اللانهائية). فمن الواضح أن نظرية الأعداد الحقيقية في شكلها الحالي لا يمكن الحصول عليها، أما بالنسبة لنظرية الأعداد الصحيحة، فمن المتفق عليه في الطبعة الثانية من برنكيبيا أنه يمكن الحصول عليها. والصعوبة المطلوب التغلب عليها هي أنه في تعريف الأعداد الصحيحة. ك "الأعداد الأصلية التي تنتمي لكل فصل يحتوي على 0 وعلى $X+1$ إن كانت تحتوي على X "، فإن عبارة "كل فصل" يجب ان تدل على ترتيب معين. بذلك نحصل على الأعداد الصحيحة في الترتيب المختلفة، ويمكن تطبيق الاستدلال على الأعداد الصحيحة ذات الترتيب n فقط على خواص الترتيب n ؛ في حين يحدث بشكل متكرر أن مفهوم العدد الصحيح نفسه يحدث في الخاصية التي ينطبق عليها الاستدلال. مع ذلك، فإن هذا المفهوم خاص بالترتيب $n+1$ بالنسبة للأعداد الصحيحة من الترتيب n .⁽²⁾

لقد قدم رسل ،في برنكيبيا، برهاناً على أن الأعداد الصحيحة من أي ترتيب أعلى من 0 هي نفسها تلك الخاصة بالترتيب 0 ، وهو الأمر الذي ينهي كل الصعوبات. مع ذلك فإن هذا البرهان ليس قاطعاً. في القضايا المفترضة Lemma^(*) المأخوذات، الذي يذهب إلي القول بأن كل مجموعة فرعية a ذات الترتيب العالي للفصل الاستدلالي β للترتيب 3 هي نفسها فصل استدلال للترتيب 3 ، وينطبق الاستدلال على خاصية β المتضمنة $[\alpha]$ أي $\alpha-\beta \neq A$ ، والتي يجب $1 \ 4 \ 6$ قراءتها كالتالي Induct2 $\alpha-\beta \sim \varepsilon$ لأن (3) كاذبة بشكل واضح]. مع ذلك، فإن هذه الخاصية ذات ترتيب $3 >$ إذا كانت α ذات ترتيب أقل من 3 . إذا مسألة ما إذا كانت نظرية

(1) Gödel, K.: op. cit., p.144.

(2) Ibid: , p.145

(*) القضية المفترضة Lemma : هي قضية يمكن الأخذ بها أو البرهنة عليها كقضية أولية بالنسبة للبرهان الخاص بأى قضية أخرى. وتمثل في القياس الأرسطي المقدمة الكبرى، بينما في الرياضيات هي حكم البداهة الذي جرى إثباته لاستخدامه في إثبات حكم بداهة أخرى، وتسمى القضايا بالمأخوذات. (أ.ه. بيسون، د.ج.أوكونر: مقدمة في المنطق الرمزي، ب.ب.ت. هامش ص 127.

الأعداد الصحيحة يمكن الحصول عليها على أساس التسلسل المتفرع، يجب اعتبارها بدون حل في الوقت الحالي. مع ذلك، يجب ملاحظة أنه حتى في حالة ما إذا كان لهذا السؤال إجابة إيجابية، فلن يكون لذلك قيمة بالنسبة لمشكلة ما إذا كان علم الحساب يتبع المنطق. إذا كانت دوال القضايا للترتيب n محددة وذات تركيب محدد وإن كانت معقدة (هذه التراكيب من الأسوار، روابط القضايا .. إلخ)، لأنه بذلك تضطر للأفترض المسبق لفكرة المحدودية، وتتكشف الحقيقة فقط بأخذ هذه المفاهيم المعقدة بطريقة محللة مثل الحدود الأولية للصورية وتقديم تعريفها فقط باللغة العادية. قد يتم تقديم الإجابة بأنه في برنكييا لا يعتبر مفهوم دالة القضية للترتيب n كأولية أو معرفة في حدود للمفهوم التركيب المحدد، بل تعتبر الأسوار التي تشير إلى دوال القضايا للترتيب n (وهو كل ما تحتاجه) كاتصال لا نهائي أو انفصال معين. لكن بعد ذلك يجب أن نسأل: لماذا لا تعرف الأعداد الصحيحة كاتصال لا نهائي $x = 0v \quad x = 0+1 \quad vx = 0+1+1v \dots$ ad infinitum، وتوفر بهذه الطريقة كل المشقة المرتبطة بمفهوم الاستدلال؟ لن ينطبق هذا الاعتراض إذا فهم الفرد أن دالة القضية للترتيب n يمكن الحصول عليها من دوال الصدق للقضايا الذرية كافتراض مسبق لتعريفها بدون مجموعات إلا تلك الخاصة بدوال القضايا للترتيب $n <$ وللأفراد". ومع ذلك فإن هذا المفهوم يفتقر للدقة إلى حد ما⁽¹⁾.

يتضح أن نظرية الترتيب مثمرة أكثر إذا وضعناها في الاعتبار من خلال وجهة نظر رياضية بحتة، وبشكل مستقل عن السؤال الفلسفي حول ما إذا كانت التعريفات غير المتوقعة مقبولة أم لا.

بالنظر بهذا الشكل، كنظرية مبنية داخل إطار عمل الرياضيات التقليدية، حيث التعريفات غير المتوقعة مسموح بها، فليس هناك اعتراض على امتدادها للترتيب المحدودة. وحتى أن رفض الشخص تلك التعريفات، فلن يكون هناك اعتراض على امتدادها للأعداد الترتيبية المحدودة والتي يمكن بنائها داخل إطار عمل الترتيب المحدودة. ويبدو أن النظرية في حد ذاتها تتطلب هذا الامتداد حيث أنها تؤدي بشكل آلي إلى اعتبار الدوال التي تشير في تعريفها إلى دوال الترتيب المحدودة، وستكون هذه دوال الترتيب ω . وبالاعتراف بالترتيب المحدودة، يمكن إثبات بديهية قابلية الرد. لكن ذلك لا يقدم أي مساعدة للهدف الأساسي للنظرية، لأن الرقم الترتيبي α - حيث كل دالة قضية مساوية لدالة الترتيب α - كبير جداً، بحيث أن يفترض مسبقاً المجموعات إلى نوع واحد خاص وهو وجود أعداد تقليدية كبيرة خاصة (أو المجموعات جيدة الترتيب) وصلاحيه التفكير التكراري فيها. وبشكل خاص، وجود مجموعة جيدة الترتيب، للأنماط $\omega 1$ يكون بالفعل لنظرية الأعداد الحقيقية. وبالإضافة لذلك فإن مبرهنة

(1) Gödel, K.: op.cit, p.146.

قابلية الرد تعد دليلاً على اتساق بديهية الاختيار في فروض كانتور ، وحتى الفرض المعمم (والذي يقول إنه لا توجد أعداد ترتيبية بين مجال أي مجموعة وبين مجال مجموعاتها الفرعية) مع بديهيات النظرية المجموعات في برنكيبييا.⁽¹⁾

رابعاً : نظرية الأنماط The Theory of Types:

أصل الآن، بشيء من التفصيل ، إلى نظرية الأنماط البسيطة ، والتي تظهر في برنكيبييا مصاحبة لنظرية الترتيب؛ مع ذلك فإن النظرية الأولى مستقلة ، إلى حد كبير ، عن الثانية، حيث لا تتعارض الأنماط المختلفة ، بشكل واضح ، مع مبدأ الدائرة المفرغة بأي شكل من الأشكال. وفقاً لذلك، وضع "رسل" أيضاً نظرية الأنماط البسيطة على أسباب مختلفة تماماً. ويتشابه السبب المقدم (بالإضافة "لتوافقته مع الإدراك العام") مع "فريجه"، الذي افترض - بالفعل - في نسقه نظرية الأنماط البسيطة للدوال، لكنه فشل في تجنب التناقضات، لأنه عمل مع الفصول (أو الدوال الماصدية) دون أي قيود. وهذا السبب هو أن دالة القضية شيء غامض (أو، كما يقول "فريجه" شيء غير مشبع يتطلب الدعم والإضافة).⁽²⁾

وبالتالي ، يمكن أن تحدث في قضية ذات مغزى، فقط، بطريقة تزيل الغموض (مثلاً باستبدال الثابت بالمتغير أو تطبيق التقدير الكمي عليه). النتائج هي أن الدالة لا يمكنها أن تحل محل الفرد في القضية، لأن الفرد ليس به اي غموض يتطلب إزالته، وأن الدوال ذات الأنواع المختلفة من الحجج (أي أنواع غموض مختلفة) لا يمكن أن تحل محل بعضها البعض، وهي خلاصة نظرية الأنماط البسيطة. وبتخاذ وجهة النظر الإسمية أكثر (مثل تلك القضية في الطبعة الثانية لبرنكيبييا وفي الصدق والمعنى)، حين أشار إلى أنه يمكن للمرء استبدال "القضية" و"عبارة" في الاعتبار المتروكة (مع التغييرات الإضافية المصاحبة). لكن في كلتا الحالتين. تنتمي هذه الحجة بوضوح إلى ترتيب أفكار نظرية "اللافصل"، حيث إنها تعتبر المفاهيم (أو دوال القضية) كشيء مبني من قضايا أو عبارات بترك أحد المكونات أو العديد منها معاً وتصبح دالات القضايا بهذا المعنى، وهو الأمر الممكن فقط إذا كانت "متلائمة معاً"، أي إذا كانت من النوع المتلائم. لكن، لايجب ملاحظة أن نظرية الأنواع البسيطة (في اختلاف مصاد مع مبدأ الحلقة المفرغة) لا يمكنها أن تأتي من وجهة نظر بنائية، لأنه يمكن بناء المفاهيم والفصول بطريقة أخرى، عندما يكون خلط الأنماط ممكناً.⁽³⁾

(1) Gödel, K. : "Russell's Mathematical logic" , p.p.146-147 .

(2) Ibid , p.147

(3) Gödel, K: op. cit. , p.148 .

من ناحية أخرى، إذا اعتبرنا التصورات كأشياء حقيقية، فإن نظرية النوع البسيطة ليست مقبولة تماماً، حيث إن ما يتوقعه المرء من التصور يبدو أنه شيء يتعدى كل "الإدراكات" المتعددة على المستويات المختلفة وبالتالي ليس موجوداً وفقاً لنظرية الأنماط. مع ذلك، يبدو أن هناك بعض الحقيقة خلف فكرة "الإدراكات" هذه لنفس التصور أو على مستويات مختلفة متعددة، ويمكن أن نتوقع بذلك، أن تثبت نظرية الأنماط البسيطة ضرورتها على الأقل كنقطة انتقالية لنسق آخر أكثر ملاءمة، وهي طريقة استخدمها "كواين Quine" بالفعل. كذلك يعتبر "الغموض النموذجي"، "لدى" "رسل"، خطوة في هذا الاتجاه. مع ذلك، بما أنها تضيف فقط مصطلحات رمزية مبسطة لنظرية الأنماط، فهي في الواقع لا تتعدى هذه النظرية.⁽¹⁾

يجب ملاحظة أن نظرية الأنماط تقدم فكرة جديدة لحل التناقضات، خاصة ملاءمتها لصورتها المفهومية. وتتركز في لوم التناقضات ليس على بديهية أن كل دالة قضية تعرف تصوراً أو فصلاً، لكن على افتراض أن كل تصور يقدم قضية ذات معنى، إذا تم تأكيدها لأي شيء أو أشياء كحجج. الاعتراض الواضح بأن كل تصور يمكن امتداده إلى كل الحجج، بتعريف تصور آخر يقدم قضية كاذبة عندما يكون التصور الأصلي بلا معنى، يمكن التعامل معه بسهولة بتوضيح أن التصور ذو معنى قابل للتطبيق "ولا يحتاج أن يكون، في حد ذاته، مطابقاً بشكل له مغزى.

ويمكن اعتبار نظرية الأنماط البسيطة (بتأويلها الواقعي) على أنها تتم من خلال هذا المخطط، وتقوم مع ذلك على الافتراض الإضافي التالي المتعلق باللامعنى $Meaningfulness$: "عندما يمكن أن يحل العنصر X مكان عنصر آخر Y في قضية ذات معنى، يمكنه ذلك في كل قضية لها معنى). هذا بالطبع له نتيجة أن الأشياء مقسمة إلى مجالات مطلقة تبادلية للمدلول. ويتكون كل مجال من هذه الأشياء التي يمكنها أن تحل محل بعضها البعض، وبذلك يكون كل تصور دالاً فقط بالنسبة للحجج التي تنتمي إلى أحد هذه المجالات؛ أي لأي جزء صغير من كل العناصر. مع ذلك فإن ما يجعل المبدأ السابق محل شك هو أن افتراضه يجعل صياغته كقضية ذات معنى شيء مستحيل^(*). لأن X ، Y يجب تحديدهما إذاً على نطاقات محددة من المدلول والتي تكون الشيء نفسه أو مختلفة عن بعضها البعض،

(1) Gödel, K.: op. cit. , p.p. 148-149.

(*) لا ينطبق هذا الاعتراض على التفسير الرمزي لنظرية النمط، التي تحدثنا عنها لأن هناك تفسير لا يحمل أي اعتراضات بل رموز من أنماط مختلفة.

وفي كلتا الحالتين لا يعبر التعبير عن مبدأ أو حتى جزء منه، النتيجة الأخرى هي أن حقيقة أن الشيء X يكون (أو لا يكون) من نمط معين، لا يمكن التعبير عنه بواسطة قضية ذات مغزى.⁽¹⁾ وليس من المستحيل أن المفكر ذات النطاق المحدد للدلالة يمكن تنفيذها بدون المبدأ المتشدد السابق. وقد يتضح أنه من الممكن افتراض أن يدل كل تصور في كل مكان ما عدا "نقاط فردية" محددة أو "نقاط محدودة"، بحيث تبدو المفارقات كشيء يشبه القسمة على صفر. ويكون هذا النسق مناسباً جداً في الاتجاه التالي: تبقى حدودنا المنطقية صحيحة، أي يمكنها أن تقدم صورة صحيحة، وربما تكون مشوشة قليلاً، للحالة الحقيقية للعلاقات. ولكن، لسوء الحظ، فشلت المحاولات التي بذلت في هذا الاتجاه حتى الآن^(*)؛ إلا أنها لم تثبت استحالتها، وعلى الرغم من ميرهنات اللا اتساق القوية لدى "كلين Kleene و"روسر Rosser⁽²⁾

شكلت فكرة تأسيس الرياضيات على المنطق، عبئاً على هذا البناء الفوقى الكبير الذي تتمتع به الرياضيات قد وضع المنطق تحت ضغط كبير فهل يمكن أن تكون بديهيات النسق المنطقي، الذي جسد البرنكيبييا تحليلياً ليتلائم مع الرياضيات. الأمر الذي جعل جودل يبحث لإيجاد إجابة تقنعه حول تساؤله.

يطرح جودل تساؤلاً حول ما إذا كان يمكن اعتبار بديهيات برنكيبييا تحليلية؟

وبالنسبة لهذه المشكلة يجب ملاحظة ما يلي :

أولاً : قابلية التحليل يمكن فهمها بمعنيين:⁽³⁾ المعنى لأول، قد يكون لها معنى صوري الخالص بأن المصطلحات، التي تحدث، يمكن تعريفها بطريقة تصبح بها البديهيات والمبرهنات حالات خاصة من قانون الهوية وتصبح القضايا غير القابلة للإثبات نفي لهذا القانون.

بهذا المعنى تصبح حتى نظرية الأعداد الصحيحة غير تحليلية، بشرط وجود إحدى قواعد الحذف أو الاستبعاد، والتي تسمح بتنفيذ الحذف في عدد محدد من الخطوات في كل حالة. أما استبعاد هذا الشرط بالاعتراف بالعبارات ذات الطول اللانهائي كخطوات وسيطة لعملية الرد، قد يتضح إمكانية إثبات أن كل بديهيات برنكيبييا تحليلية. لكن هذه الملاحظة ذات قيمة تخضع للشك، لأن الرياضيات المطبقة على العبارات ذات الطول اللانهائي يجب افتراضها

(1) Gödel, K. : Op.cit , p.149

(*) النظام الصوري، في هذا الاتجاه هو نظام Church حيث يعبر عن الفكرة الأساسية بالعبارة المضللة إلى حد ما بأن قانون الوسط المحذوف أصبح مستبعداً، مع ذلك ثبت أن هذا النظام غير متسق. الرجوع الى فلسفة الرياضيات

(2) Gödel, K.: Op.cit, p.150.

(3) Ibid, p. p.150-151.

بشكل مسبق لإثبات هذه الناحية التحليلية، أي يمكن إثبات أن بديهية الاختيار تحليلية فقط إذا افترضنا مسبقاً أنها صحيحة.

المعنى الثاني: تعتبر القضية تحليلية إذا استمرت "لها معنى التصورات الموجودة فيها" حيث قد يكون هذا المعنى غير قابل للتعريف. وقد يبدو أن كل بديهيات برنكيبييا، في الطبعة الأولى، (فيما عدا بديهية اللانهائي)، في هذه الحالة تحليلية بالنسبة لتأويلات المصطلحات الأولية، أي إذا كان المصطلح "دالة المحمول" يمكن استبداله إما بـ "الفصل" (بالمعنى الماصدق) أو (باستبعاد قاعدة الاختيار) بـ "تصور"، بما أنه لا شيء يمكنه التعبير بشكل أفضل عن معنى المصطلح "الفصل" إلا بديهية الفصول، وبديهية الاختيار، وبالتالي من ناحية أخرى، يبدو أن معنى المصطلح "تصور" يفترض أن كل دالة قضية تعرف مفهوماً. الصعوبة فقط في أننا لا ندرك مفاهيم "تصور" و"فصل" بتمييز كافٍ، كما توضح المفارقات .

يصرح جودل عن رؤيتهمؤكد عدم تعارض هذه الرؤية مع الرأي الذي دافع عنه من قبل بأن الرياضيات قائمة على قواعد ذات محتوى حقيقي، لأن وجود تصور "فصل" يمثل بالفعل هذه القاعدة وإذا عرفنا "فصل" و"ε" إحتواء الفرد في فصل، على أنها "التصورات الخاضعة للقواعد" فلن نستطيع إثبات وجودها. ويمكن تعريف "التصور" في صورة "قضية"، على الرغم من أنه اعتقد أن ذلك ليس إجراء طبيعياً، لكن بذلك سنضطر لافتراض قواعد معينة عن القضايا والقابلة للتعديل فقط بالدلالة إلى المعنى غير المعروف للمصطلح يجب ملاحظة أن هذه الرؤية عن قابلية التحليل تجعل من الممكن اختصار كل قضية رياضية إلى حالة خاصة $a = a$ إذا حدث الرد، ليس في صورة تعريفات المصطلح، بل في معناه، وهو الذي لا يمكن التعبير عنه تماماً في مجموعة من القواعد الصورية.⁽¹⁾

في ضوء هذا الموقف، اتخذ "رسل" مساراً، وهو أن يضع في اعتباره كلاً من الفصول والتصورات على أنها ليست موجودة، واستبدالها ببنيات خاصة بنا. ولا يمكن إنكار أن هذا الإجراء أدى إلى أفكار مثيرة وإلى نتائج ذات قيمة عالية لمن يتخذون وجهة النظر المضادة. بشكل عام، مع ذلك، فإن الناتج هو أن أجزاء المنطق الرياضي فقط هي التي تبقى، ما لم يعاد تقديم الأشياء المدونة في صورة قضايا لا نهائية أو بواسطة بديهيات مثل بديهية قابلية الرد والتي تعتبر خاطئة بشكل واضح (في حالة العديد من الأفراد) ما لم نفترض إما وجود الفصول أو العديد من "المجموعات". يبدو أن هذه المصطلحات "فصل" و"تصور"، ووضع نظرية متوافقة للفصل

(1) Gödel, K.: Op.cit, p.151.

والتصورات ككيانات لها وجود بشكل موضوعي. هذا هو المسار الذي اتخذته تطور المنطق الرياضي والذي اضطر "رسل" - نفسه - إلى دخوله في الأجزاء البنائية من عمله.⁽¹⁾

لقد بدا الأمر، بالنسبة للعديد من الفلاسفة بما فيهم رسل ، أن المنطق - نفسه - يجب أن يكون مستقلاً بالكامل عن أى ادعاءات للوجود ،لقد كانت أكثر افتراضات الوجود المطلوبة الإنتقادية - وراء بديهية اللانهائية - كان ما أسماه بديهية القابلية للرد ، والتي أحد أشكالها تعبر عن أن بأعطاء أى مجموعة من الفصول غير المتداخلة سيوجد فصل إضافي مؤلفة من عضو واحد من كل الفصول المعطاة. انها تبدو بديهية عقلانية بصورة كافية وتبدو، فى ظاهرها أقل مخاطرة من بديهية اللانهائية ولكن ما سيثير الجدل أن نطلق عليها أنها صادقة استناداً على صورتها، على الرغم من أنها أشياء دخيلة لوضع البديهيات التي تؤكد وجود الفصول.⁽²⁾

انتهى جودل إلى الاعتراف بقيمة المحاولات الفكرية ، التي قدمها رسل لتحقيق حلمه وحلم ليبنتز من قبله فى رد الرياضيات إلى المنطق محدداً أهم تلك المحاولات في هذا الاتجاه نظرية العلاقات والتي تعد أساس كل النظريات الأخرى مثل ،"نظرية الأنماط البسيطة"، و"نظرية المجموعات"، بتحديد طبيعة ارتباط الحدود داخل القضية وفق علاقات محددة تبعاً لمفهومها وتصوراتها وماصداقاتها، مثل هذا التحديد وفقاً لبنية التركيبات المنطقية و بنية النسق اللغوي ودلالة الألفاظ. والتي من خلالها تستطيع تحقيق قدر من النجاح يسمح لاشتقاق الرياضيات الحديثة، وتجذب المفارقات. بالرغم من أن التصورات الأولية مازالت تحتاج لمزيد من التوضيح والتفسير.

ويبدو من المعقول الشك في أن عدم الفهم الدقيق للأسس هو المسئول عن حقيقة أن المنطق الرياضي ظل حتى الآن بعيداً عن الآمال الكبيرة لـ "بيانو" وآخرين والذين كانوا يأملون؛ وفقاً لإدعاءات ليبنتز؛ أنه يسهل الرياضيات النظرية إلى نفس الحد مثل النسق العشري للأعداد الذي سهل الحسابات الرقمية. وكيف يمكن للشخص حل المسائل الرياضية بمجرد تحليل المفاهيم المعروضة، إذاً كان التحليل لا يكفي حتى لوضع القواعد؟ لكن ليست هناك حاجة للتخلي عن الأمل. ولم يتحدث "ليبننتز" في كتاباته " عن المشروع اليوتوبي. إذا كنا سوف نصدق كلامه بأنه طور هذا الحساب إلى حد كبير، لكنه انتظر ولم ينشره حتى تسقط البذرة التالية على أرض خصبة. وتمادى أكثر من ذلك وقام بتقدير الوقت اللازم لحسابه كي يتطور بواسطة عدد

(1) Gödel, K.: Op.cit, p.152.

(2) Jager , R: "The Development of Bertrand Russell's Philosophy", P.213.

من العلماء إلى الحد الذي "يكون لدى الإنسانية نوع جديد من الآلات يرفع من قوى التفكير أكثر من أي آلة بصرية أخرى كانت قد دعمت قوة الإبصار".

إن هذا الموقف يبدو، مقارناً مع مظاهر في نهاية القرن التاسع عشر، مع تطور الهندسة الإقليدية. إن إستجابة رسل في ١٩٠٣ لهذا التطور المؤخر نجده يتعلق بالموضوع هنا. ثم حاول بعد ذلك أن يجد سمات عامة للهندسة تمكنها من أن يتم إستعمالها في أصول الرياضيات وكذلك مبادئ المنطق. كما فهم ذلك، بدون التعرض لسؤال صدق البديهيات الإقليدية. وبإختصار شديد، فإن هذا كان كامناً في تطوير المنطق الملائم للقول بأن البديهيات تتضمن المبرهنات. ^(١) كتب رسل في مقدمة الطبعة الثانية لكتابه "أصول الرياضيات" عام ١٩٣٨ إيماناً منه بالنزعة المنطقية الفرضيات الأساسية للصفحات التالية، والتي تذهب إلى التطابق بين الرياضيات والمنطق "وهي التي لم أرى أي سبب لتعديلها"، ربما أصر رسل على وضع تلك العبارة في المقدمة رداً على ما أنتج من هجوم عنيف حول أسس الرياضيات ومدى يقينها وكذلك أستحالة البرهنة على شيء كما ذهب إلى ذلك جودل. وعلى نفس المنهج صار جون بولوك John L. Pollok الذي يرى أن غاية عمله إثبات عدم صحة النزعة المنطقية التي نادى بها رسل محاولاً تدعيم وجهة نظره إستناداً على نتائج جودل في نقطتين رئيسيتين هما :

١- يمكن تعريف كل مفاهيم الرياضيات بمفاهيم المنطق، وطبقاً لذلك فإن كل عبارات الرياضيات يمكن ترجمتها إلى عبارات منطقية.

٢- صدق كل قضايا الرياضيات يصبح صدقاً منطقياً ^(٢).

اشتهرت النزعة المنطقية Logicism بأعتبارها نتاج أعمال رسل ومجهوداته في تفسير المعرفة الرياضية بالقول بأن لها نفس المصادر وتصنيفات المنطق، وهي بذلك تبسيط للمشكلات الإبستمولوجية لتفسير المعرفة بأسس الرياضيات، وقبل عام ١٩٣١ أعتقد البعض أن المنطق بديهياً. وفي الحقيقة، فقد افترض أن المنطق أصبح بديهياً على يد رسل في كتاب أصول الرياضيات، وتبعاً لذلك فسرت النزعة المنطقية بأعتبارها دعماً للنظرية الكلاسيكية أي صدق الرياضيات التقليدية. وفي عام ١٩٣١ نشر جودل مبرهناته الشهيرة بمبرهنة عدم الإكتمال، والتي تنص في جوهرها أن لا يعد كل من الرياضيات والمنطق بديهياً بصورة كاملة "والنتيجة أن النزعة المنطقية حتى وإن كانت صحيحة فلا يمكن أعتبارها كتفسير للمعرفة الرياضية. لأن نتائج جودل

(1) Jager, R: Op. cit., P.217.

(2) John L. Pollok : "On Logicism" in Essays on Bertrand Russell" Edited by Klemke, E.D., University of Illinois Press, London, 1970, p.p.388-389.

تظهر بأستحالة فهم معرفتنا بالأسس المنطقية. وهكذا معرفتنا الرياضية. حيث أظهر أن أية رابطة بين النزعة المنطقية والرياضيات التقليدية قد زالت، وتبعاً لذلك، فإن العديد من الأفراد قد نزعوا إلى اعتبار أن النزعة المنطقية صادقة وذات أهمية في ذاتها دون تقديم أى مساعدة لشرح معرفتنا القبلية للرياضيات. ومازال السؤال قائماً حول كونها صحيحة أم لا يحتاج إلى إجابة. هل النزعة المنطقية صادقة أى محاولة رد الرياضيات إلى أسس منطقية؟⁽¹⁾

يذهب جون بولوك إلى أنها خاطئة. معتمداً على نقطتين رئيسيتين هما. معظم المحاولات التي دحضت النزعة المنطقية ركزت على المبادئ والاساس الثانى (صدق الرياضيات يصبح صدقاً للمنطق) بينما ركز جون بولوك على المبدأ الأول " يمكن تعريف كل مفاهيم الرياضيات بتصورات منطقية وطبقاً لذلك يمكن ترجمة عبارات الرياضيات إلى عبارات منطقية ". فإذا كان المقصود " بالمنطق " هو " المنطق بالدرجة الأولى " فإن النزعة المنطقية تعد خاطئة بصورة واضحة. لأن المنطق من الدرجة الأولى بديهيها بصورة كاملة، ومن ثم فإن أى نظرية رياضية يمكن ردها إليه ستكون بديهية، ولكن أثبتت مبرهنة جودل أن ليست كل النظريات الرياضية قابلة لأن تعد بديهية، ولهذا لا يمكن رد كل النظريات الرياضية إلى المنطق ذى الدرجة الأولى. وربما تكون النزعة المنطقية مقلعة إذا أشتملت على نظرية المجموعات أو النظر للمنطق بأعتباره منطقاً ذا نمط عالى⁽²⁾.

وبناءً على ما سبق يمكن تحديد الصحة المنطقية Logical Validity للمنطق ذى مرتبة عالية فى نظرية المجموعات، وحتى الآن فإن إمكانية رد الرياضيات إلى المنطق ذى النمط الأعلى هى أيضاً إمكانية ردها إلى نظرية المجموعات وبالتالي فإن صدق النزعة المنطقية تحولت إلى تساؤل عن إمكانية رد الرياضيات إلى نظرية المجموعات من عدمه؟⁽³⁾.

لقد كتب رسل فى المبادئ : "لقد تم إثبات، بكل إقناع البراهين الرياضية، أن أى مقدمات أخرى غير مقدمات إقليدس (مقدمات رسل) يمكن أن تعطى النتائج تجريبياً [منطقياً] بشكل غير مميز فى إطار حدود الملاحظة (نظرية العدد)، من هؤلاء الخاصين بالنسق التقليدى (PM).. لكن تمخض التحرى عن روح جديدة بين علماء الهندسة [علماء المنطق] ومن خلال إيجاد أن أنكار بديهية إقليدس الخاصة بالمتوازيات [بديهية رسل لصالح الفروض المتواصلة الخاصة بزرميلو Zermelo أو جودل Godel قد أدى إلى نسق مختلف، الذى كان متسقاً بذاتيته،

(1) John L. Pollok: " On Logicism" in Essays on Bertrand Russell" Edited by Klemke, E.D., University of Illinois Press, London, 1970, P389.

(2) John L. Pollok : "On Logicism", p.p.389-390.

(3) John L. Pollok : " On Logicism" , p.390.

ومن المحتمل أن يكون صادقاً في العالم الفعلى، فإن علماء الرياضيات (المناطقه) أصبحوا مهتمين بتطوير التوابع التى أتت من مجموعات البديهيات الأخرى التى تشبه تقريباً بديهيات إقليدس (بديهيات رسل) ومن ثم ظهر عدد كبير من الهندسات [الأنساق المنطقية] غير المتسقة، كقاعدة مع بعضها البعض ولكن كلاً منها متسق بذاته داخلياً. إن التشابه مع إقليدس(رسل)المطلوب فى مجموعة مقترحة من البديهيات قد قلت بالتدرج، ونجد أن يتم التحقيق عن العديد والعديد من الأنساق الأستنباطية الممكنة على حسابهم، وبهذه الطريقة فإن الهندسة [نظرية المجموعات] أصبحت فرعاً من الرياضيات البحتة أى مادة يكون فيها التأكيدات هى أن النتائج كذا وكذا تلزم منطقياً عن المقدمات كذا وكذا، وليس أن الكينونات التى تضيفها المقدمات تتواجد بالفعل" (١)

وكون أن هذه القطعة يمكن أستخدامها فى وصف عمله فلا يعد هذا شيئاً قد خطر على بال رسل فى ١٩٠٣ عندما كتبه وكذلك فإن هذا لم يكن ليرضيه فى عام ١٩٣٧ عندما أعاد طبعه.

(1) Jager , R: Op.cit.,P.P.217-218

نتائج البحث :

بعد هذا العرض التحليلي النقدي لبعض نظريات المنطق الرياضى لدى رسل يمكننا استخلاص النتائج التالية:

١- أن رؤية كورت جودل شكلت بالضرورة رافداً من أهم روافد تطوير الرياضيات، فلم تقتصر الحقيقة الرياضية على مطابقة المسلمات للواقع وإنما على مدى إتساق النسق ذاته .

٢- وترتيباً على النتيجة السابقة فقد أدى الأمر إلى تجريد المسلمات من كل المعانى الهندسية وإحالتها إلى تصورات منطقية بحتة، ومن ثم تراجعت الأشكال الهندسية التى أحتلت الصدارة فى علم الرياضيات وأخضعت علم الحساب نفسه لها فى العالم القديم، وأصبح الأمر منصباً على أعداد فحسب بل وعلى تصورات منطقية خالصة.

٣- أثبت جودل أن علم الرياضيات ليس مكتمل البرهنة، ولا بإمكانه أن يبلغ لحظة تمام البرهان. وتبلورت نتائج مبرهناته كنقطة إنطلاق محورية لإعادة النظر فى محاولة رسل رد الرياضيات للأسس المنطقية .

٤- وترتيباً على ما سبق فقد قدم جودل نوعاً من العصف الذهنى Brain Storming للباحثين فى المنطق الرياضى. وهو ما يعد اسهاماً جديداً من جانب جودل فى فهم منطق رسل .

٥- وتأسيساً على النتائج السابقة يمكننا القول إن موقف جودل يأتى لتطوير منطق برتراند رسل أكثر منه رؤية نقدية، وهو ما تقرد به بين الباحثين الذين تعرضوا لمنطق رسل.

٦- أن مبرهنة جودل لعدم إكتمال النسق ، مهدت الطريق للمنطق الرياضى كمحاولة لإكتمال النسق بتصوراته المنطقية وتعمقات أكبر فى دلالة اللغة .

٧- فتح جودل الطريق أمام علم الدلالات للبحث فى الأنساق الصورية من ناحية منطقية، ودلالية، وبذلك استطاع أن يوجه علماء الرياضيات والمناطق إلى التفكير فى الصياغات الصورية من زاوية دلالية، وجعلهم يتأملون الأفكار والحقائق الرياضية من خلال منحتركيبي ولغوى بصورة جذرية.

٨- اعترف جودل بقيمة المحاولات الفكرية ، التى قدمها رسل لرد الرياضيات إلى المنطق من خلال تحديد طبيعة ارتباط الحدود داخل القضية وفق علاقات محددة تبعاً لمفهومها وتصوراتها ، ووفقاً للأبعاد البنية المنطقية والسيمنطقية والتى من خلالها إستطاع رسل تحقيق قدر من النجاح يسمح لاشتقاق الرياضيات الحديثة من الأسس المنطقية ، وتجنب المفارقات.

المصادر والمراجع والمعاجم والقواميس

العربية والأجنبية

أولاً: المصادر والمراجع العربية

(أ) المصادر المترجمة إلى العربية

- ١- برتراندرسل: فلسفتي كيف تطورت، ترجمة عبد الرشيد الصادق، مراجعة زكي نجيب محمود، مكتبة الأنجلو المصرية، الطبعة الأولى، ١٩٦٠.
- ٢- -----: أصول الرياضيات، ترجمة محمد مرسى أحمد، أحمد فؤاد الأهواني، الجزء الأول، دار المعارف بمصر، 1965.
- ٣- -----: محاورات برتراندرسل: شيخ فلاسفة العصر، ترجمة جلال العشري، الهيئة المصرية للكتاب، 1979.
- ٤- -----: مقدمة الفلسفة الرياضية، ترجمة محمد مرسى أحمدو أحمد فؤاد الأهواني مؤسسة سجل العرب، القاهرة، 1980 .
- ٥- -----: فلسفة الذرية المنطقية، ترجمة ماهر عبد القادر محمد، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية، 1998.

(ب) المراجع العربية

- ١- إبراهيم يوسف النجار: برتراندرسل فكره وموقعه في الفلسفة المعاصرة، الجامعة الأمريكية، بيروت، ١٩٩٧
- ٢- _____: "الفلسفة التحليلية من هيوم إلى رسل" الفكر العربي لعدد ٦٣ السنة الثانية عشر مارس ١٩٩١ مجلة الإنماء العربى للعلوم الإنسانية والفلسفة والعلوم".
- ٣- زكي نجيب محمود : نوابغ الفكر الغربي ٢ برتراندرسل، دار المعارف بمصر، القاهرة، الطبعة الثانية، بدون تاريخ.
- ٤- _____: المنطق الوضعي،، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة، 1951.
- ٥- _____: موقف من الميتافيزيقا، دار الشروق، بيروت، الطبعة الثانية، 1983.
- ٦- صلاح عثمان، المنطق متعددالقيم بين درجات الصدق وحدود المعرفة، منشأة المعارف، الإسكندرية، 2002 .

٧- ماهر عبد القادر محمد : نظريات المنطق الرياضى، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية، ١٩٨٠.

٨- _____: فلسفة العلوم " المنطق الرياضى "، دار النهضة العربية ج 3، بيروت، 1985.

٩- -----: كارل بوبر منطق الكشف العلمى، أورينتال، الإسكندرية، 2011.

١٠- محمد ثابت الفندى : فلسفة الرياضة، دار النهضة العربية، بيروت، طبعة أولى، ١٩٦٩،

١١- محمد محمد قاسم، نظريات المنطق الرمزي، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية، ١٩٩١.

١٢- محمد مهران : مقدمة للمنطق الرمزي، دار الثقافة للطباعة والنشر، القاهرة، ١٩٧٨.

١٣- _____: فلسفة برتراندرسل، دار المعارف القاهرة، طبعة ثالثة، 1986

١٤- _____: دراسات فى فلسفة اللغة، دار قباء للطباعة والنشر والتوزيع، القاهرة، 1998

١٥- محمود فهمى زيدان: فى فلسفة اللغة ، دار النهضة العربية، بيروت، 1985.

(ج) مراجع مترجمة إلى العربية

١- أ.ه.بيسون ود.ج.أوكونر: مقدمة فى المنطق الرمزي، ترجمة: عبد الفتاح الديدى، دار المعارف بمصر، القاهرة،

٢- ألفرد تارسكي: مقدمة للمنطق ومناهج البحث فى العلوم الإستدلالية، ترجمة عزمى إسلام، مراجعة فؤاد زكريا، الهيئة العامة للتأليف والنشر، القاهرة، 1970.

٣- روبر بلانشى: المنطق وتاريخه من أرسطو حتى رسل، ترجمة خليل أحمد خليل، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر

(د) المعاجم والموسوعات :

١- جميل صليبا : المعجم الفلسفى، دار الكتاب اللبنانى، بيروت، 1982

٢- فؤاد كامل وآخرون: الموسوعة الفلسفية المختصرة، مراجعة زكى نجيب محمود، مكتبة الأنجلو المصرية، 1982،

٣- عبد المنعم الحفنى، المعجم الفلسفى، موسوعة الفلسفة والفلاسفة، مكتبة مدبولى، القاهرة، ط 2 ج 1 ، ج2، 1999

٤- م.روزنتال ويودين : الموسوعة الفلسفية، ترجمة سمير كرم، مراجعة صادق جلال العظم وجورج طرابيشى، دار الطليعة للطباعة والنشر، بيروت، 1967 .

٥- يوسف كرم، مراد وهبه ويوسف شلاله، المعجم الفلسفي، الهيئة المصرية العامة للكتاب،
٢٠١٦

٦- معن زيادة :الموسوعة الفلسفية العربية، المجلد الثاني، (المدارس والمذاهب والاتجاهات
والتيارات، القسم الأول، معهد الإنماء العربي، الطبعة الأولى، 1988.

ثانيا: المصادر والمراجع الأجنبية

(أ) المصادر الأجنبية

- 1- Gödel , K.: "**Russell's Mathematical Logic**", in " The Philosophy of Bertrand Russell", Edited by Schilpp, Paul, A., North Western University , Evanston & Chicago , 1944 .
- 2- Quine,W.V.: "**Russell's Theory of Types**" in "Essays on Bertrand Russell", Edited By; Klemke, E.D., University of Illinois Press, London, 1970
- 3- Russell B.: **Human Knowledge Its Scope and Limits**, Published by Simon and Schuster, New York, 1948.
- 4- —————: "**My Mental Development**", in "The Philosophy of Bertrand Russell", Edited By; Paul A. Schlipp, Northwestern University, Evanston and Chicago, 1944.

(ب) المراجع الأجنبية

- 1- Anscombe,G.E.M.: "**An Introduction to Wittgenstein's Tractatus**", Hutchinson University,London, 1967,
- 2- Alasdair Urquhart :**Russell's Zigzag path to the ramified to theory of types** in "the journal of Bertrand Russell studies edited by Russell McMaster University, Canada, 1988.
- 3- A.N .Prior: "**Russell, Bertrand Arthur William**", in "The Encyclopedia of Philosophy", Edited By: Paul Edwards, Collier Macmillan, New York, Vol. 7, 1972.

- 4- Arthur , Pap, : "**Types and Meaninglessness**", in "Mind", Vol. LXIX, No. 273, Published By; Thomas Nelson & Sons, Ltd., Parkside Works, Edinburgh, 1960.
- 5- Carnap,R. :"**The Logician Foundations of Mathematics**", "in Essays On Bertrand Russell", Edited by E.D.Klemke, University of Illinois Press, London, 1970.
- 6- Dagfinn Follesdal : "**Introductory note to 1961**", in "Kurt Gödel Collected Works", Edited by Solomon Feferman & John W. Dawson Dagfinn Follesdal, Oxford University Press, New York Oxford, v.3, 1995.
- 7- Dummett Michael: "**Frege, Gottlob**", in; "The Encyclopedia Of Philosophy", Edited By: Paul Edwards, Collier Macmillan, New York; Vol. III; 1972.
- 8- F.P Ramsey: "**Predicative Functions and the Axiom of Reducibility**", in, Essays On Bertrand Russell", Edited by E.D.Klemke, University of Illinois Press, London, 1970.
- 9- Feibleman, James: "**A Reply to Bertrand Russell's Introduction to the 2nd Edition of 'The Principles of Mathematics'**", in "The Philosophy of Bertrand Russell", Edited By; Paul A. Schilpp, Northwestern University, Evanston & Chicago, 1944.
- 10- J. Van Heijenoort : "**Gödel's theorem**" in "The Encyclopedia of Philosophy" Edited By, Paul Edwards, Collier Macmillan, New York, Vol.3 1972
- 11- Jager, R.: "**The Development of Bertrand Russell's Philosophy**", George Allen and Unwin, LTD., London, 1972.
- 12- Klemke, E.D.: "**Logic and Ontology In Russell's Philosophy**", in "Essays on Bertrand Russell", Edited By; Klemke, E.D., University of Illinois Press, London, 1970

- 13- Pears, David & Kenny, Anthony: "**Mill to Wittgenstein**" in "The Oxford Illustrated; "History Of Western Philosophy ", Oxford University Press, New York; 1994.
- 14- Rebecca Goldstein "**Incompleteness**" **The Proof and Paradox of Kurt Gödel**, Atlas Books,W.W.Norton&Company,NewYork,2005.
- 15- Stephen C. Kleene: "**Kurt Gödel A biographical memoir**", in National academy of sciences, Washington D.C., 1987.
- 16- Solomon Feferman :"**In the light of logic**", in "Logic and computation in philosophy", Oxford ,,U. press,U.S.A.

(ج) المعاجم:

- 1- Runes, Dagobert D.: "**Dictionary Of Philosophy**", Philosophical Library, New York, 16th Edition.